# Tema 1.- Variable aleatoria discreta (V2.1)

## 1.- Concepto de variable aleatoria

- A cada posible resultado de un experimento lo llamamos <u>suceso elemental</u>, y lo denotamos con $\omega_1$, $\omega_2$, …

- Llamamos <u>espacio muestral</u> al conjunto de los posibles resultados de un experimento, y lo denotamos por $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots \}$

- <u>Una variable aleatoria $X$</u> es una función que a cada suceso elemental $\omega_i$ del espacio muestral $\Omega$ le asigna un número real $X(\omega_i)$.

$$\begin{aligned} X:\ \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega_i &\rightarrow X(\omega_i). \end{aligned}$$

*Ejemplo.1, Ejemplo.2 y Ejemplo.3*

## 2.- Variables aleatorias discretas y continuas.

- Una <u>variable aleatoria es discreta</u> si:
  - Toma un conjunto de valores finito
  - ó Toma un conjunto de valores infinito, pero numerable

    *(numerable: que a cada elemento del conjunto se le puede asignar un nº natural, que hay un primer elemento, y que dado un elemento está claro cual es el siguiente)*

- Una <u>variable aleatoria es continua</u> si:
  - puede tomar cualquier valor real en uno o varios intervalos reales.

    *(es decir, toma un conjunto de valores infinito e innumerable)*

*Un ejemplo de conjunto infinito e innumerable son los nos reales del intervalo [0,10]*

- Llamamos <u>Distribución de probabilidad de una variable aleatori</u>a al Conjunto formado por:

  (Cada uno de los valores que toma esa var aleat) más (la probab. de ese valor)

**1.3**.- Sea $X$ una variable aleatoria discreta ,

y sea $x_i$, i=1, 2, … cada uno de los valores que toma esa variable.

Se llama **<u>función de probabilidad</u>** <u>de una distribución discreta</u> a la función que asigna a cada valor $x_i$ de la variable discreta la probabilidad $p_i$ de que la variable tome ese valor.

$$\begin{aligned} P:\ X &\rightarrow [0,1] \\ x_i &\rightarrow P(X = x_i) = p_i \qquad \text{con } i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Se ha de cumplir que: $\left\{ \begin{array}{l} p_i \geq 0 \\ \sum p_i = 1 \end{array} \right\}$ e implica que $p_i \in [0,1]$

*Ejemplo.4*

## 1.4.- Función de distribución (o Función de distribución acumulada)

= **$F(x) = P(X \le x)$** ($X$ *discreta o continua*)

Es una función F(x) que asigna a cada x la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores menores o iguales que x

Se ve que $F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_i) = p_1 + p_2 + \ldots + p_i$ con $x_i \le x$

Propiedades:
- $F(x_i) \in [0,1]$
- $\lim_{x_i \to -\infty} F(x_i) = 0 \qquad \lim_{x_i \to \infty} F(x_i) = 1$
- $F(x_i)$ es monótona no decreciente, (si $X$ discreta es un escalera entre 0 y 1)
- $F(x_i)$ es continua por la derecha
- $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

## 1.5.- Características de una distribución

**a) Esperanza matemática, valor esperado o media = $E(X) = \mu$**

- $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

  - Si tenemos que g(X) es otra variable aleatoria obtenida como función de X,

  también podemos hallar su esperanza: $E(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$

- Propiedad: Sean **a, b** constantes: $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$

**b) Varianza = $Var(X) = E( (X-\mu)^2 ) = \sigma^2$**

- $Var(X) = E((X-\mu)^2) = \Sigma (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = \ldots = E(x^2) - [E(x)]^2$

  Se puede calcular de las dos formas, pero esta última es más rápida.
- Propiedad: Sean **a, b** constantes: $Var(a \cdot X + b) = a^2 \cdot Var(X)$

**b) Desviación típica = $\sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$**

La varianza y la desviación típica miden cómo de alejados están de la media una serie de datos. *Ejemplo 1.6*

## 1.6.- Modelos de distribuciones de probabilidad.

**a) Distrib. uniforme discreta** describe el comportamiento de una var. aleat. $X$ que

- Puede tomar N valores distintos $x_1, x_2, \ldots, x_N$ equiespaciados
- Todos los valores $x_i$ tienen la misma probabilidad = $P(X=x_i) = \frac{1}{N}$

Usaremos **$U_D(N)$**, una distrib. unif. discreta con soporte: $x_1=1, x_2=2, \cdots, x_N=N$

Con $U_D(N)$ tengo: $P(X=i) = \frac{1}{N}$ $\qquad E(U_D(N)) = \frac{N+1}{2}$ $\qquad Var(U_D(N)) = \frac{N^2-1}{12}$

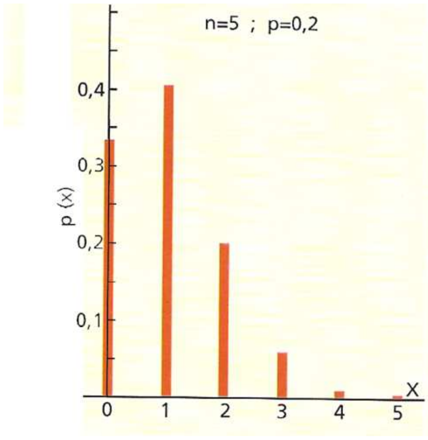
Ejemplo 1.7

**b) Distribución binomial ≈ B(N,p)**: es la correspondiente a la variable aleatoria $X$ que expresa el nº de éxitos de un experimento consistente en N pruebas:

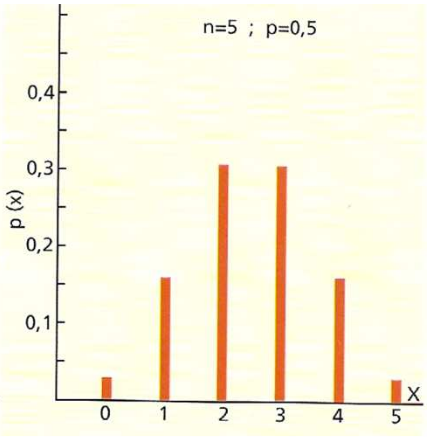
- En cada prueba sólo hay 2 resultados: A y $\bar{A}$, con P(A) = p y $P(\bar{A})$ = q = 1 - p
- El resultado de cada prueba es independiente del resultado de las anteriores pruebas
- P(A) = constante, no varía en cada prueba

P(obtener r éxitos) = P($X$ =r) = $\binom{N}{r}p^r q^{N-r}$ NOTA: $\binom{N}{r} = \frac{N!}{r!(N-r)!}$

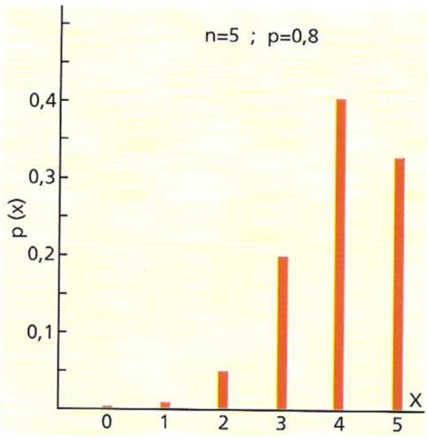
*( ¿Crees que puedes deducir esta fórmula? )*



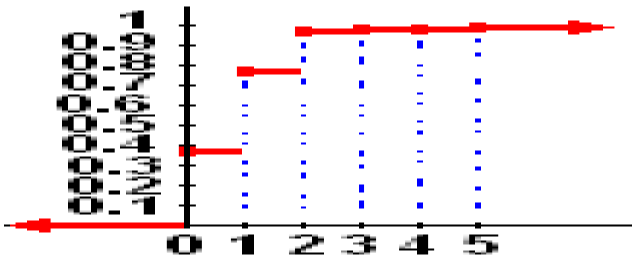
f($x_i$) de B(N=5, p=0'2)



f($x_i$) de B(N=5, p=0'5)



f($x_i$) de B(N=5, p=0'8)


F(x) para B(N=5, p=0'2)

*Deducir cómo se hacen estas gráficas*

*Ejemplos 1.8 a 1.9*

Dada $X$ = B(N,p) tenemos que: E($X$) = N·p Var($X$) = n·p·q

Nota: El caso típico de distribución binomial es muestreo con reemplazamiento

Ej: Tengo una bolsa con 3 bolas rojas y 7 negras, saco 5 bolas de una en una, y cada vez que saco una apunto el color y entonces la vuelvo a meter

a) Comprueba que se cumplen las condiciones de la binomial

b) Observa que si no hay reemplazamiento **no** es la distribución binomial, sino la distribución hipergeométrica.

NOTA: Se disponen de tablas de la Función de Distribución acumulada de B(N,p)
A partir de $F_{B(N,p)}(x) = P_{B(N,p)}(X\leq x)$ calculo: $P_{B(N,p)}(X=x) = F_{B(N,p)}(x) - F_{B(N,p)}(x-1)$

NOTA: Binomial negativa: Si mantenemos las condiciones de las pruebas:

- En cada prueba sólo hay 2 resultados: A y $\bar{A}$, con P(A) = p y $P(\bar{A})$ = q = 1 - p
- El resultado de cada prueba es independiente del resultado de las anteriores pruebas
- P(A) = constante, no varía en cada prueba

La variable aleatoria $X'$ consistente en el nº de pruebas necesarias para obtener r éxitos se corresponde con la llamada distrib. binomial negativa

**c)** La **Distribución Hipergeométrica H(N,n,k)** se asocia al siguiente exp. aleat.:

- Se tiene una población total de N elementos, de los cuales k son de un tipo y el resto (N-k) de otro.
- Se extrae una muestra aleatoria de n elementos simultáneamente

(al extraerse simultáneamente se pierde el reemplazo y por tanto las condiciones para ser una binomial)

X = Número de elementos del tipo **k** en una muestra **n** de un pobl. tot. de **N**

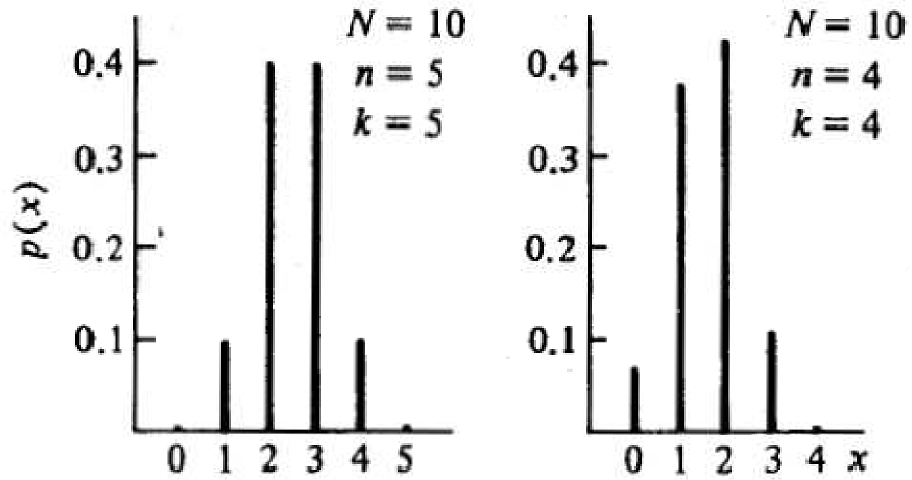
$$P(X=r) = \frac{\binom{k}{r}\cdot\binom{N-k}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

$$\mu = \frac{n\cdot k}{N} \qquad Var(X) = \frac{n\cdot k\cdot(N-k)}{N^2}\cdot\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Llamando: $p = \frac{k}{N}$ $q = 1\text{-}p = \frac{N-k}{N}$ quedan fórmulas parecidas a la binomial:

$$\mu = n\cdot p \qquad Var(X) = n\cdot p\cdot q\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

- Si el muestreo fuera con reemplazamiento X sería una B(n,p)
- Si $\left\{\begin{array}{l}\text{N es muy grande}\\ n<<N\end{array}\right\}$ entonces $H(N,n,k) \approx B(n,\ p=\frac{k}{N})$




NOTA.1: Se disponen tablas de la Distrib. Hipergeométrica

Ejemplo 1.10

## d) Experimento de Poisson y Distribución de Poisson:

Experimento de Poisson: Es un experimento aleatorio que consiste en contar el número N de sucesos en un soporte continuo infinitamente divisible, tal como el tiempo, superficie, etc.

(tomamos el tiempo en los ejemplos pero se puede cambiar por superficie, longitud, etc)

- Lo que ocurre en un intervalo de tiempo es independ. de lo ocurrido en otro
- En un interv. de tiempo sufic. pequeño: $P(N=0) >> P(N=1)$ , $P(N\geq 2)\to 0$
- $N(t) = \lambda\cdot t$ donde $\lambda$ es el nº promedio de sucesos por unidad de tiempo

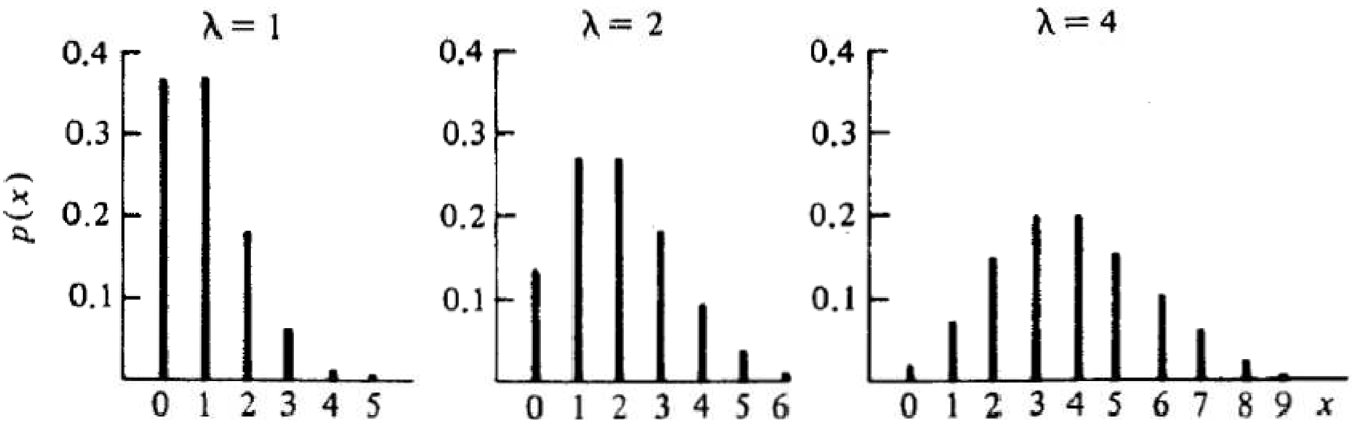
El número de sucesos en un intervalo de tiempo dado es una variable aleat. de distribución de Poisson siendo λ la media de sucesos en este intervalo.

- Probabilidad de que ocurran k sucesos en el intervalo: $P_\lambda(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$

con λ la media de sucesos en este intervalo

$$E(X) = \lambda \qquad Var(X) = \lambda$$

Ejemplos:
- La cantidad de clientes que entran a una tienda.
- El número de coches que pasan por una autopista.
- La llegada de personas a una fila de espera.
- El número de llamadas que llegan a una central telefónica.
- Partículas emitidas por un material radiactivo




NOTA.1: Se disponen de tablas de la Función de Distrib. acumulada de Poisson

$$P_{Poisson(\lambda)}(X=x) = F_{Poisson(\lambda)}(x) - F_{Poisson(\lambda)}(x-1)$$

NOTA.2: La distribución binomial B(N,p) con **N** muy grande y **p** muy pequeña entonces puedo tomar $\lambda = N\cdot p$ para aproximar $B(N,p) \approx Poisson(\lambda)$

Funciona bien si sale que: $\lambda>5$ $p\leq 0'1$

NOTA.3: El tiempo entre dos sucesos de Poisson es una var. aleatoria continua que sigue una Distribución Exponencial

NOTA.4: El tiempo hasta que el suceso k ocurre en un proceso de Poisson de intensidad λ es una variable aleatoria continua con Distribución Gamma.