

Tema 1.- Variable aleatoria discreta (v2.1)

1.- Concepto de variable aleatoria

- A cada posible resultado de un experimento lo llamamos suceso elemental, y lo denotamos con $\omega_1, \omega_2, \dots$
- Llamamos espacio muestral al conjunto de los posibles resultados de un experimento, y lo denotamos por $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \dots \}$
- Una variable aleatoria X es una función que a cada suceso elemental ω_i del espacio muestral Ω le asigna un número real $X(\omega_i)$.

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega_i &\rightarrow X(\omega_i). \end{aligned}$$

Ejemplo.1, Ejemplo.2 y Ejemplo.3

2.- Variables aleatorias discretas y continuas.

- Una variable aleatoria es discreta si:
 - Toma un conjunto de valores finito
 - ó Toma un conjunto de valores infinito, pero numerable
(*numerable: que a cada elemento del conjunto se le puede asignar un n^o natural, que hay un primer elemento, y que dado un elemento está claro cual es el siguiente*)
- Una variable aleatoria es continua si:
 - puede tomar cualquier valor real en uno o varios intervalos reales.
(*es decir, toma un conjunto de valores infinito e innumerable*)

Un ejemplo de conjunto infinito e innumerable son los n^{os} reales del intervalo $[0,10]$

- Llamamos Distribución de probabilidad de una variable aleatoria al Conjunto formado por:
(Cada uno de los valores que toma esa var aleat) más (la probab. de ese valor)

1.3.- Sea X una variable aleatoria discreta ,

y sea $x_i, i=1, 2, \dots$ cada uno de los valores que toma esa variable.

Se llama función de probabilidad de una distribución discreta a la función que asigna a cada valor x_i de la variable discreta la probabilidad p_i de que la variable tome ese valor.

$$\begin{aligned} P: X &\rightarrow [0,1] \\ x_i &\rightarrow P(X = x_i) = p_i \quad \text{con } i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Se ha de cumplir que:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i \geq 0 \\ \sum p_i = 1 \end{array} \right\} \text{ e implica que } p_i \in [0,1]$$

Ejemplo.4

1.4.- Función de distribución (o Función de distribución acumulada)

$$= F(x) = P(X \leq x) \quad (X \text{ discreta o continua})$$

Es una función $F(x)$ que asigna a cada x la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores menores o iguales que x

Se ve que $F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_i) = p_1 + p_2 + \dots + p_i$
con $x_i \leq x$

Propiedades: $F(x_i) \in [0, 1]$
 $\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_i) = 0$ $\lim_{x_i \rightarrow \infty} F(x_i) = 1$
 $F(x_i)$ es monótona no decreciente, (si X discreta es un escalera
 $F(x_i)$ es continua por la derecha entre 0 y 1)
 $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

1.5.- Características de una distribución

a) Esperanza matemática, valor esperado o media = $E(X) = \mu$

$$\bullet E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

• Si tenemos que $g(x)$ es otra variable aleatoria obtenida como función de x ,

también podemos hallar su esperanza: $E(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$

• Propiedad: Sean a, b constantes: $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$

b) Varianza = $\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = \sigma^2$

$$\bullet \text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = \sum (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = \dots = E(x^2) - [E(x)]^2$$

Se puede calcular de las dos formas, pero esta última es más rápida.

• Propiedad: Sean a, b constantes: $\text{Var}(a \cdot X + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$

b) Desviación típica = $\sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$

La varianza y la desviación típica miden cómo de alejados están de la media una serie de datos. Ejemplo 1.6

1.6.- Modelos de distribuciones de probabilidad.

a) Distrib. uniforme discreta describe el comportamiento de una var. aleat. X que

• Puede tomar N valores distintos x_1, x_2, \dots, x_N equiespaciados

• Todos los valores x_i tienen la misma probabilidad = $P(X=x_i) = \frac{1}{N}$

Usaremos $U_D(N)$, una distrib. unif. discreta con soporte: $x_1=1, x_2=2, \dots, x_N=N$

Con $U_D(N)$ tengo: $P(X=i) = \frac{1}{N}$ $E(U_D(N)) = \frac{N+1}{2}$ $\text{Var}(U_D(N)) = \frac{N^2-1}{12}$

Ejemplo 1.7

b) Distribución binomial $\approx B(N,p)$: es la correspondiente a la variable aleatoria

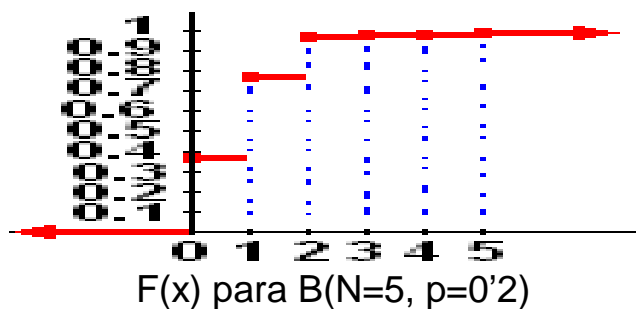
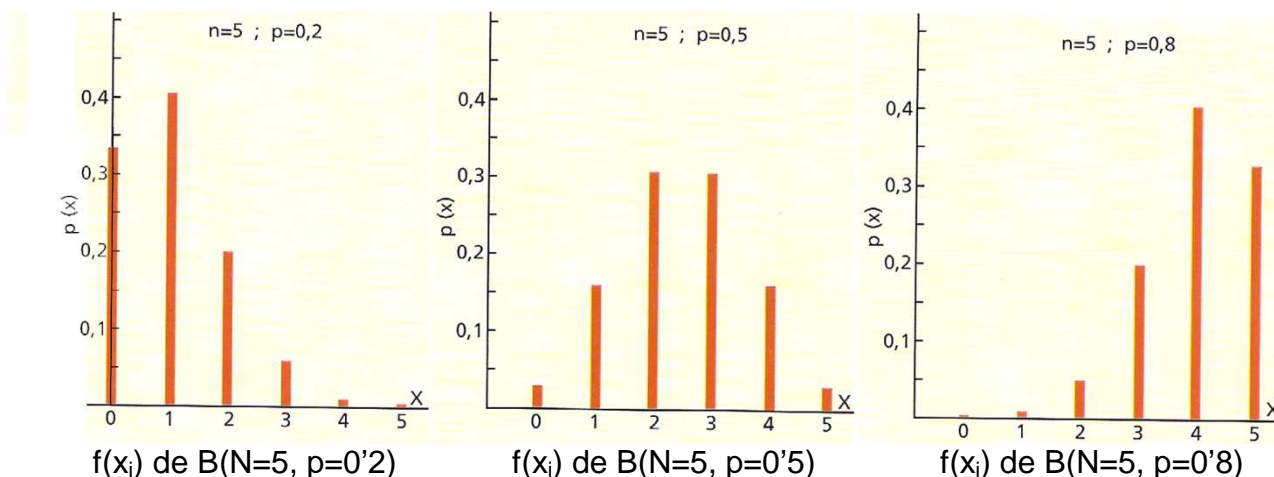
X que expresa el n^0 de éxitos de un experimento consistente en N pruebas:

- En cada prueba sólo hay 2 resultados: A y \bar{A} , con $P(A) = p$ y $P(\bar{A}) = q = 1 - p$
- El resultado de cada prueba es independiente del resultado de las anteriores pruebas
- $P(A) =$ constante, no varía en cada prueba

$$P(\text{obtener } r \text{ éxitos}) = P(X=r) = \binom{N}{r} p^r q^{N-r}$$

NOTA: $\binom{N}{r} = \frac{N!}{r!(N-r)!}$

(¿Crees que puedes deducir esta fórmula?)



Deducir cómo se hacen estas gráficas

Ejemplos 1.8 a 1.9

Dada $X = B(N,p)$ tenemos que: $E(X) = N \cdot p$ $Var(X) = n \cdot p \cdot q$

Nota: El caso típico de distribución binomial es muestreo con reemplazamiento

Ej: Tengo una bolsa con 3 bolas rojas y 7 negras, sacó 5 bolas de una en una, y cada vez que sacó una apuntó el color y entonces la volvió a meter

- Comprueba que se cumplen las condiciones de la binomial
- Observa que si no hay reemplazamiento **no** es la distribución binomial, sino la distribución hipergeométrica.

NOTA: Se disponen de tablas de la Función de Distribución acumulada de $B(N,p)$. A partir de $F_{B(N,p)}(x) = P_{B(N,p)}(X \leq x)$ calculo: $P_{B(N,p)}(X=x) = F_{B(N,p)}(x) - F_{B(N,p)}(x-1)$

NOTA: Binomial negativa: Si mantenemos las condiciones de las pruebas:

- En cada prueba sólo hay 2 resultados: A y \bar{A} , con $P(A) = p$ y $P(\bar{A}) = q = 1 - p$
- El resultado de cada prueba es independiente del resultado de las anteriores pruebas
- $P(A) =$ constante, no varía en cada prueba

La variable aleatoria X' consistente en el n^0 de pruebas necesarias para obtener r éxitos se corresponde con la llamada distrib. binomial negativa

- c) La Distribución Hipergeométrica $H(N,n,k)$ se asocia al siguiente exp. aleat.:**
- Se tiene una población total de N elementos, de los cuales k son de un tipo y el resto $(N-k)$ de otro.
 - Se extrae una muestra aleatoria de n elementos simultáneamente (al extraerse simultáneamente se pierde el reemplazo y por tanto las condiciones para ser una binomial)

X = Número de elementos del tipo k en una muestra n de un pobl. tot. de N

$$P(X=r) = \frac{\binom{k}{r} \cdot \binom{N-k}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

$$\mu = \frac{n \cdot k}{N}$$

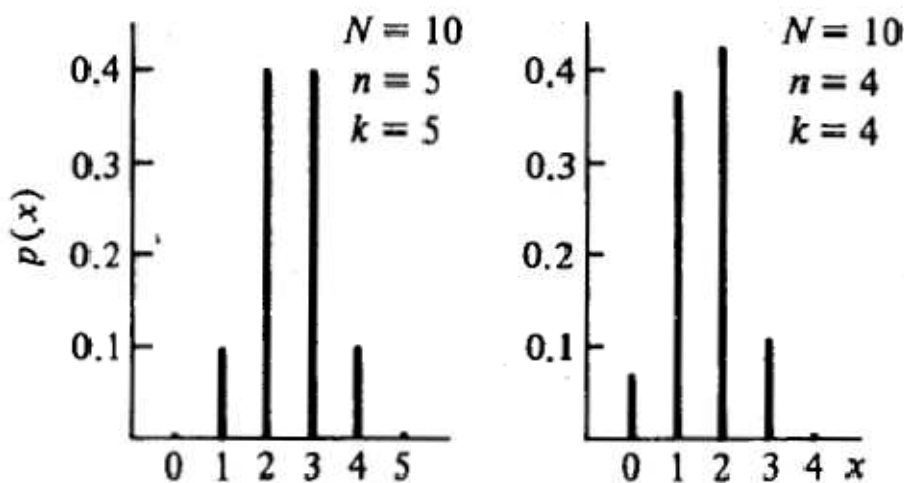
$$\text{Var}(X) = \frac{n \cdot k \cdot (N-k)}{N^2} \cdot \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

Llamando: $p = \frac{k}{N}$ $q = 1-p = \frac{N-k}{N}$ quedan fórmulas parecidas a la binomial:

$$\mu = n \cdot p$$

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

- Si el muestreo fuera con reemplazamiento X sería una $B(n,p)$
- Si $\left\{ \begin{array}{l} N \text{ es muy grande} \\ n \ll N \end{array} \right\}$ entonces $H(N,n,k) \approx B(n, p = \frac{k}{N})$



NOTA.1: Se disponen tablas de la Distrib. Hipergeométrica

Ejemplo 1.10

d) Experimento de Poisson y Distribución de Poisson:

Experimento de Poisson: Es un experimento aleatorio que consiste en contar el número N de sucesos en un soporte continuo infinitamente divisible, tal como el tiempo, superficie, etc.

(tomamos el tiempo en los ejemplos pero se puede cambiar por superficie, longitud, etc)

- Lo que ocurre en un intervalo de tiempo es independ. de lo ocurrido en otro
- En un interv. de tiempo sufic. pequeño: $P(N=0) \gg P(N=1)$, $P(N \geq 2) \rightarrow 0$
- $N(t) = \lambda \cdot t$ donde λ es el nº promedio de sucesos por unidad de tiempo

El número de sucesos en un intervalo de tiempo dado es una variable aleat. de distribución de Poisson siendo λ la media de sucesos en este intervalo.

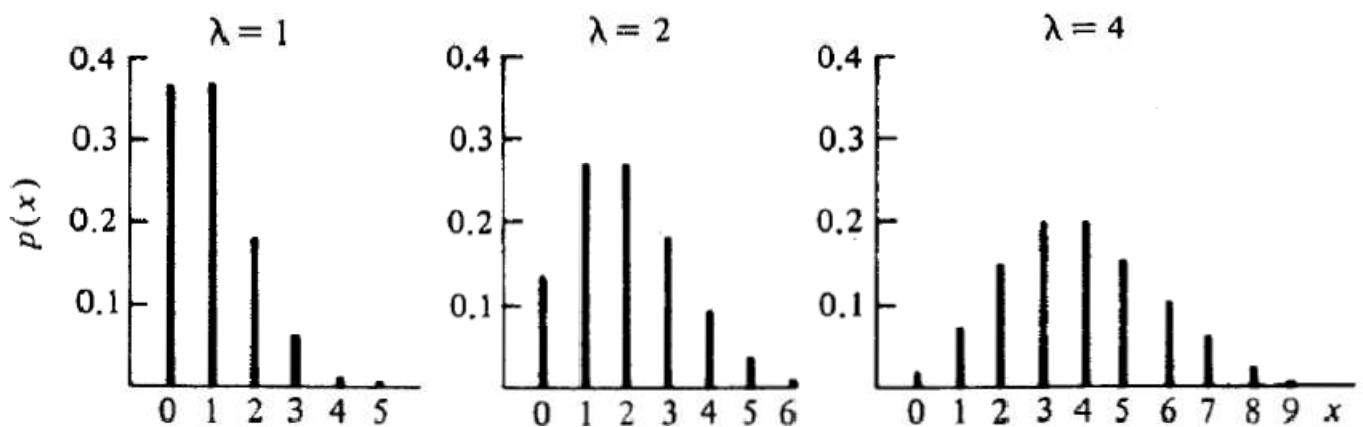
- Probabilidad de que ocurran k sucesos en el intervalo: $P_{\lambda}(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$
con λ la media de sucesos en este intervalo

$$E(X) = \lambda$$

$$\text{Var}(X) = \lambda$$

Ejemplos:

- La cantidad de clientes que entran a una tienda.
- El número de coches que pasan por una autopista.
- La llegada de personas a una fila de espera.
- El número de llamadas que llegan a una central telefónica.
- Partículas emitidas por un material radiactivo



NOTA.1: Se disponen de tablas de la Función de Distrib. acumulada de Poisson

$$P_{\text{Poisson}(\lambda)}(X=x) = F_{\text{Poisson}(\lambda)}(x) - F_{\text{Poisson}(\lambda)}(x-1)$$

NOTA.2: La distribución binomial $B(N,p)$ con **N** muy grande y **p** muy pequeña entonces puedo tomar $\lambda = N \cdot p$ para aproximar $B(N,p) \approx \text{Poisson}(\lambda)$

Funciona bien si sale que: $\lambda > 5$ $p \leq 0.1$

NOTA.3: El tiempo entre dos sucesos de Poisson es una var. aleatoria continua que sigue una Distribución Exponencial

NOTA.4: El tiempo hasta que el suceso k ocurre en un proceso de Poisson de intensidad λ es una variable aleatoria continua con Distribución Gamma.