Tema 2.- Variable aleatoria Continua. (V.2)

1.- Concepto de variable aleatoria continua

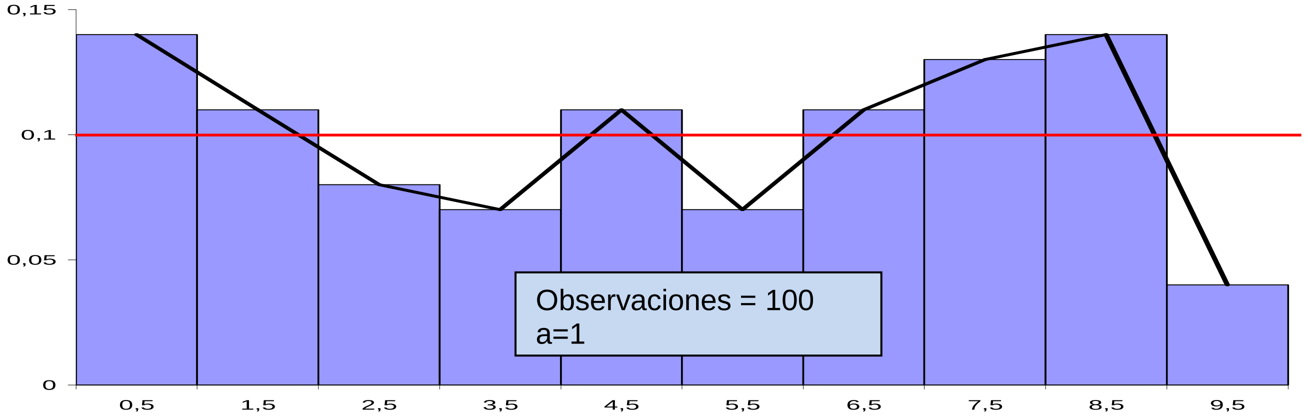
- Una variable aleatoria es continua si:
  - puede tomar cualquier valor real en uno o varios intervalos reales.
    (es decir, toma un conjunto de valores infinito e innumerable)

Ejemplo.1: X = Los nos reales del intervalo [0,10]

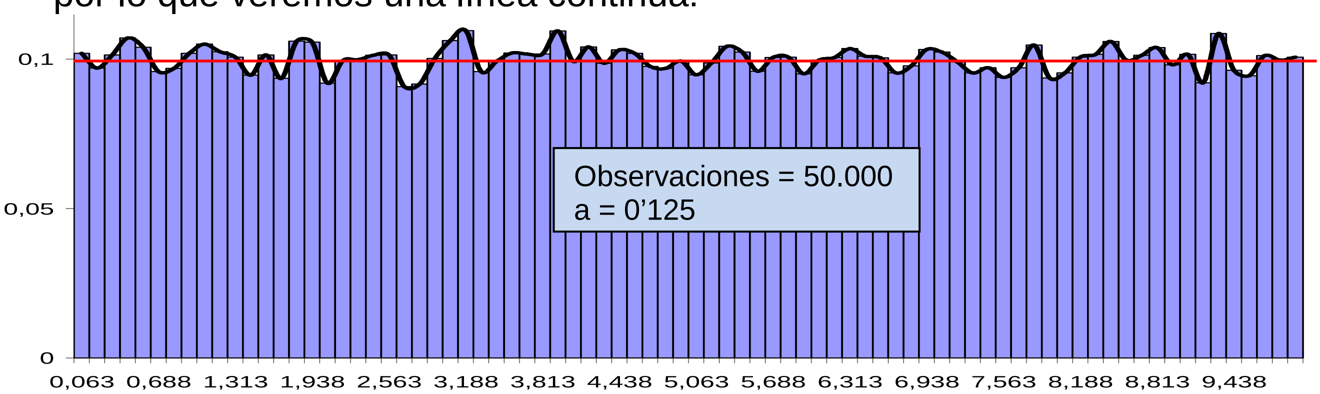
- P(obtener un valor concreto)=0 $\rightarrow$ P(X=0'53456) = $\frac{\text{casos a favor}}{\text{casos totales}} = \frac{1}{\infty} = 0$

Por tanto no miraremos si X toma un valor concreto,
sino si X toma un valor dentro de un intervalo (a,b) $\Rightarrow$ $P(a \leq X \leq b)$

Imaginemos que X sigue a una distribución uniforme continua,
y vamos anotando la frecuencia relativa de los resultados en cada intervalo
(cada intervalo tiene de anchura **a**).

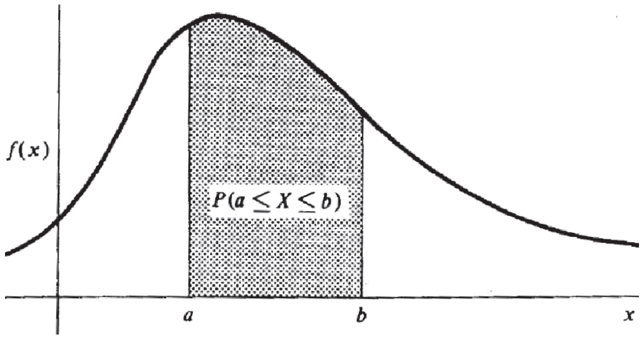


Vamos a ver qué pasa si la anchura **a** se va haciendo cada vez más pequeña:
- Llegará un momento que la anchura será tan pequeña que la llamaremos **da**.
- En ese momento será imposible distinguir los rectángulos de cada intervalo, por lo que veremos una línea continua:



Esa línea continua dada por f(x) la llamaremos función de densidad

2.- Propiedades de la función de densidad de una variable aleatoria continua:



- $\Rightarrow$ $f(x) \geq 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$
- $\Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- $\Rightarrow$ $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) =$
  $= P(a \leq X < b) =$
  $= P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

3.- Función de distribución

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

equivalentemente: $$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

F(x) tiene las mismas propiedades que cuando lo vimos en el caso discreto

$0 \leq F(x) \leq 1,\ \forall\ x \in R$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ $\qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

F(x) es monótona no decreciente $\qquad$ F(x) es continua por la derecha

$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ (da igual el signo =)

4.- Media y varianza

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx \qquad E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

$E(a{\cdot}X + b) = aE(X) + b$

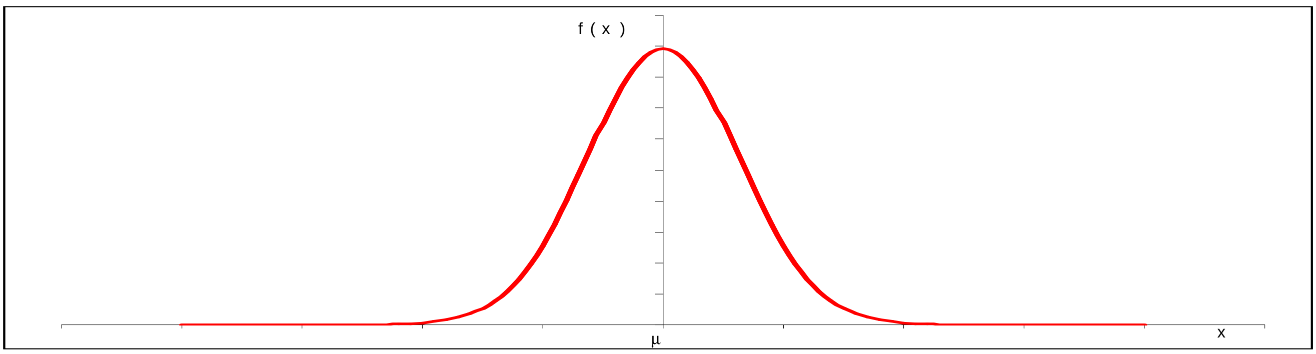
$Var(X) = E((X-\mu)^2) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) = E(X^2) - \mu^2$ $\qquad Var(a{\cdot}X + b) = a^2Var(X)$

5.- La distribución normal N(μ,σ)

Una var. aleat. X se distribuye según una *distrib. normal de media $\mu \in$* ***R*** *y desv. típica $\sigma > 0$* si su soporte es **R** y su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

con $x \in (-\infty, \infty)$



Se suele trabajar con la Normal Estandar N(0,1), donde $\mu=0$ y $\sigma=1$

En este caso: $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$$

Sea X que sigue una N(μ,σ). Si hago $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ entonces Z sigue una N(0,1)
Entonces haré el cambio de variable para poder utilizar las tablas de N(0,1)

Si X es N(μ,σ). $\Rightarrow$ $P_{N(\mu,\sigma)}(X\geq r) = P_{N(0,1)}(Z \geq \frac{r-\mu}{\sigma})$

Aprovecharemos la simetría para calcular: $P_{N(0,1)}(Z \leq -k) = P_{N(0,1)}(Z \geq k)$

Ver ejemplo

Si hacemos los cálculos vemos que:

$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu-\sigma) = 0'683$
$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu-2\sigma) = 0'954$
$P(\mu-3\sigma \leq X \leq 3\mu-\sigma) = 0'998$

Es la <u>ley de probabilidad más importante</u>

- La distribución normal se usa para representar las distribuciones de una gran cantidad de variables físicas: ***Coef. inteligencia, estatura, rendimientos, resistencia, peso, ...***
- Es una buena aproximación para otras distribuciones: Binomial, Poisson, ...
- En Inferencia Estadística se resuelven fácilmente muchos problemas bajo la hipótesis de normalidad

5.B: TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Cuando los resultados de un experimento son debidos a un conjunto muy grande de factores independientes, que actúan sumando sus efectos, siendo cada efecto individual de poca importancia respecto al conjunto, es esperable que los resultados sigan una distribución normal.

5.C: Aproximación de una distribución X_B Binomial por la Normal

Si n es grande (típico n>30), de forma que **$n\cdot p > 5$** cuando $p\leq 1/2$
$n\cdot(1-p) > 5$ cuando $p\geq 1/2$

y además **$0'1 < p < 0'9$** entonces: $X_B \approx N(\mu,\sigma)$, con $\mu = n\cdot p$, $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot q}$

$$P(a\leq X\leq b) \cong P(a-0.5 \leq Y_{N(\mu,\sigma)} \leq b+0.5)$$

NOTA.1: Los errores en las colas suelen ser mayores.
NOTA.2: Si (n>30) y (p<0.1), Binomial $\cong$ Poisson con $\lambda = n\cdot p$

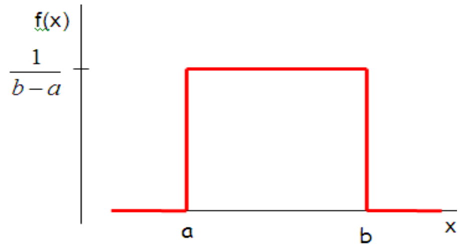
5.D: Aproximación de una Poisson por la Normal

Si $\lambda > 30$ entonces: $P_\lambda \approx N(\mu,\sigma)$, con $\mu = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$

$$P(a\leq X\leq b) \cong P(a-0.5 \leq Y_{N(\mu,\sigma)} \leq b+0.5)$$

6.- Distribución Uniforme.

En el caso discreto decíamos que todas las x_i tenían igual probabilidad.
En continua decimos que la f(x)=cte en el intervalo.



f(x) = $\frac{1}{b-a}$ si $x \in (a,b)$ y 0 en el resto

E(X) = $\frac{a+b}{2}$ Var(X) = $\frac{(b-a)^2}{12}$

Si X es una variable aleatoria con función de distribución F entonces $U = F(X) \sim U([0,1])$

(Fundamento de la simulación estocástica)

Ver ejemplo

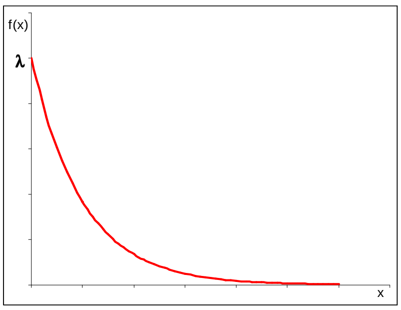
7. DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Esta asociada a experimentos de Poisson que se desarrollan en el tiempo.
X se corresponde con el tiempo transcurrido entre dos éxitos
también al tiempo transcurrido hasta el primer éxito

$X \sim Exp(\lambda)$ con $\lambda>0$ siendo λ = promedio de éxitos en la unidad de tiempo.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x>0$$

Es una función exponencial decreciente



E(X) = $\frac{1}{\lambda}$ Var(X) = $\frac{1}{\lambda^2}$.

Ver ejemplo