ESTADÍSTICA II

Práctica nº 1 – Cálculo de probabilidades

Finalidad de la práctica:

1. Simular valores aleatorios de una distribución dada.

2. Dar una explicación intuitiva de la función de densidad de una var. cont. usando histogramas.

3. Ilustrar de forma numérica y gráfica las aproximaciones de la distrib Binomial a las distrib. de Poisson y Normal

4. Ilustrar de forma numérica y gráfica la aproximación de la distrib. de Poisson a la distrib. Normal.

REPASO TEÓRICO

1.- Simulación de variables aleatorias.

Se usará el Método de la Función de Distribución Inversa:

Sea **X** una variable aleatoria, con su **función de distribución F(x)** conocida.
Entonces la función **U=F(x)** sigue una **distribución uniforme U(0,1)**

Generar valores de la función de distribución uniforme es muy fácil y lo hacen todos los programas.
Por tanto generaré valores $\mathbf{u_i}$ de la uniforme, y a partir de $\mathbf{u_i}$ obtendré $\mathbf{x_i}$ ya que $u_i=F(x_i) \Rightarrow \mathbf{x_i=F^{-1}(u_i)}$

Ejemplo: Simular valores a partir de una v.a. con distribución exponencial $X \sim \varepsilon(\lambda)$

- Comenzamos estableciendo la Función de distribución de la exponencial: $F(x)=1-e^{-\lambda x}$
- Igualamos a los valores de la variable uniforme $u_i=F(x_i)=1-e^{-\lambda x_i}$
- Despejamos y obtenemos la fórmula para la generación de los x_i:
  $u_i=1-e^{-\lambda x_i} \Leftrightarrow e^{-\lambda x_i}=1-u_i \Leftrightarrow -\lambda x_i=\ln(1-u_i) \Rightarrow$
  $$x_i=-\frac{\ln(1-u_i)}{\lambda}$$

2.- Obtención de los histogramas y aproximación a la función de densidad

Con los valores observados de una var. aleat. podemos construir los histogramas y el polígono de frecuencias que nos permitan aproximar a una función de densidad y determinar la distribución de probabilidad.

1.- Crear los límites de clases en que se divide el rango de valores observados.
2.- Calcular la frecuencia de cada clase (contar el nº de datos de cada clase)
3.- Obtener la densidad de frecuencia para dibujar el histograma de frecuencias
4.- Con un gráfico combinado representar el polígono de frecuencias.

Este histograma o bien el polígono de frecuencias nos dará idea del tipo de función de densidad y, por lo tanto, de la distribución de probabilidad que se puede ajustar.

3.- Ilustrar las aproximaciones entre las distribuciones Binomial, Poisson y Normal

- Aproximación Binomial-Poisson

Si $X \sim Bi(n,p)$ entonces se verifica que:

$$P[X=x|X\sim Bi(n,p)] \approx P[Y=x|Y\sim \wp(np)]$$

$$P[X\leq x|X\sim Bi(n,p)] \approx P[Y\leq x|Y\sim \wp(np)]$$

cuando $n\to\infty$, $p\to 0$ y $np \to \lambda$ cte. La aproximación tiende a funcionar mejor cuanto más grande es λ

- Aproximación Binomial-Normal con corrección de continuidad

Si $X \sim Bi(n,p)$, se verifica que:

$$P[X=x|X\sim Bi(n,p)] \approx P[Y \leq x+0.5 \ |Y\sim N(np, \sqrt{npq})]- P[Y \leq x-0.5 \ |Y\sim N(np, \sqrt{npq})]$$

$$P[X\leq x|X\sim Bi(n,p)] \approx P[Y \leq x+0.5 \ |Y\sim N(np, \sqrt{npq})]$$

cuando $n\to\infty$.

La aproximación tiende a funcionar mejor cuanto más grande son np y np(1-p)

- Aproximación Poisson-Normal con corrección de continuidad

Si $X \sim \wp(m)$, se verifica que:

$$P[X=x|X\sim \wp(m)] \approx P[Y \leq x+0.5 \ |Y\sim N(m, \sqrt{m})]- P[Y \leq x-0.5 \ |Y\sim N(m, \sqrt{m})]$$

$$P[X\leq x|X\sim \wp(m)] \approx P[Y \leq x+0.5 \ |Y\sim N(m, \sqrt{m})]$$

cuando $m\to\infty$. La aproximación tiende a funcionar mejor cuanto más grande es m

Las siguientes funciones están disponibles en EXCEL:

- ALEATORIO() que proporciona valores aleatorios de una distribución uniforme entre 0 y 1. Es la función básica para simular cualquier otra variable aleatoria.
- FRECUENCIA(datos;grupos) que calcula la frecuencia observada dentro de cada clase definida por grupos a partir de un conjunto de valores que denominamos datos. Es una función vectorial por lo tanto se debe finalizar pulsando simultáneamente: Control+Mayúsculas+Enter.
- DISTR.BINOM(num_éxitos;ensayos;prob_éxito;acumulado) que calcula el valor de la función de cuantía (si acumulado = 0) o de distribución (si acumulado =1) en el punto num_éxitos para una distribución binomial con parámetros n=ensayos y p = prob_éxito
- POISSON(x;media;acumulado) que calcula el valor de la función de cuantía (si acumulado = 0) o de distribución (si acumulado =1) en el punto x para una binomial con de Poisson con parámetro λ = media.
- DISTR.NORM(x;media;dev_estándar;acum) que calcula el valor de la función de cuantía (si acum = 0) o de distribución (si acum =1) en el punto x para una distribución normal con parámetros μ= media y σ=dev_estándar.
- DISTR.NORM.ESTAND.INV. Calcula el inverso de la distribución normal estándar acumulativa. La distribución tiene una media de cero y una desviación estándar de uno.

Ejemplos:

B(N,p)

P(X = k) = DISTR.BINOM(k;N;p;0)

P(X ≤ k) = DISTR.BINOM(k;N;p;1)

Poisson(λ)

P(X = k) = POISSON(k; λ;0)

P(X ≤ k) = POISSON(k; λ;1)

Normal(μ,σ)

P(X ≤ k) = DISTR.NORM(k;μ;σ;1)

Normal(0,1)

$P(Z \leq z_\alpha) = \alpha$

z_α = DISTR.NORM.STAND.INV(α)