

# 12.- Funciones de varias variables.

## 12.0.- Definiciones

Una función escalar de n variables  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación, t.q.

$$\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in D \rightarrow y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

$D = \text{Dominio}(f)$ , es decir, el conjunto de  $(x_1,x_2,\dots,x_n)$  para los que  $f$  existe

Una función escalar de 2 variables  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación, t.q.

$$(x,y) \in D \rightarrow z=f(x,y)$$

$D = \text{Dominio}(f)$ , es decir, el conjunto de  $(x,y)$  para los que  $f$  existe

La gráfica de f es el lugar geométrico de los puntos  $(x,y,z)$  dados por  $z=f(x,y)$ .

Si  $f$  es continua entonces  $f$  representa una superficie

## 12.1.- Nociones topológicas en $\mathbb{R}^2$

Consideramos  $\mathbb{R}^2$  dotado de estructura de Espacio Vectorial

Consideramos  $\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  la norma euclidea de  $v$ , donde  $v=(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Consideramos la distancia entre los puntos  $P_1=(x_1,y_1)$  y  $P_2=(x_2,y_2)$

$$d(P_1,P_2)=\|P_2-P_1\|=\|(x_2-x_1, y_2-y_1)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Llamamos Bola Abierta de centro  $P_0$  y radio  $\varepsilon$  al conjunto de puntos del plano cuya

distancia a  $P_0$  es menor que  $\varepsilon$ :  $\mathbf{B}_\varepsilon(\mathbf{P}_0)=\{P \in \mathbb{R}^2, \text{ t.q. } \|P-P_0\|<\varepsilon$

Llamamos Bola Reducida de centro  $P_0$  y radio  $\varepsilon$  a  $\mathbf{B}_\varepsilon^r(\mathbf{P}_0)= \mathbf{B}_\varepsilon(\mathbf{P}_0)-\{\mathbf{P}_0\}$

## 12.2.- Límite

$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , t.q. si  $(x,y) \in B_\delta^r(P_0) \Rightarrow |f(x,y)-L| < \varepsilon$

La función  $f$  tiende hacia el límite  $L$  cerca de  $(x_0,y_0)$  si se puede hacer que  $f(x,y)$  esté tan cerca como queramos de  $L$  haciendo que  $(x,y)$  esté suficientemente cerca de  $(x_0,y_0)$ , siendo  $(x,y)$  distinto de  $(x_0,y_0)$ .

Si existe  $L$ , entonces por muy pequeño que sea  $\varepsilon$  encontraremos un  $\delta(\varepsilon)$

NOTA: Si el límite existe, es único.

NOTA: Cuando  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = 0$  se dice que es un infinitésimo

Llamamos límites reiterados a:  $\mathbf{L}_{xy} = \lim_{y \rightarrow y_0} [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)]$

$$\mathbf{L}_{yx} = \lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)]$$

Llamamos límite radial al límite de  $f(x,y)$  cuando nos acercamos a  $(x_0,y_0)$  según la recta  $y=y_0+m(x-x_0)$ :

$$\mathbf{L}_m = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0 + m \cdot (x - x_0))$$

Llamamos límite direccional al límite de  $f(x,y)$  cuando nos acercamos a  $(x_0,y_0)$  según una curva  $C$  que pasa por  $(x_0,y_0)$

NOTAS:

Si  $L_{xy} \neq L_{yx}$ , ó  $L_m$  depende de  $m$ , ó  $L_m \neq$  Límites reiterados  $\Rightarrow \nexists L$

- Si  $\exists L$  entonces coincidirá con cualquier límite reiterado o direccional que exista.
- si  $L^* = L_{xy} = L_{yx} = L_C$ , entonces  $L^*$  es el candidato a  $L$ , pero puede no haber límite.
- Puede existir  $L$ , aunque no exista algún límite reiterado.

- Sea  $L^*$  candidato a  $L \rightarrow$  Poner  $|f(x,y) - L^*|$  en coord. polares:  $\begin{matrix} x=x_0+r\cdot\cos \alpha \\ y=y_0+r\cdot\sen \alpha \end{matrix}$   
 $\rightarrow$  Acotar  $|f(x,y) - L^*| \leq g(r)$   
 $\rightarrow$  Si  $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$  entonces  $L=L^*$

### 12.3.- Continuidad

En general,  $f(x,y)$  es continua en  $(x_0,y_0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

### 12.4.- Diferenciabilidad. Sea $z=f(x,y)$ definida en un abierto $D$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}$$

En la práctica  $\frac{\partial f}{\partial x}$  se calcula:

- imaginando la  $y$  como una constante
- derivando respecto a la variable  $x$

Llamamos Derivada direccional de  $f$  en  $(x_0,y_0)$  según el vector  $\vec{u}$  unitario a

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h \cdot \vec{u}) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si nos dan un vector  $\vec{v}$  no unitario lo normalizamos haciendo:  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

$f$  es diferenciable en  $(x_0,y_0) \in D$  si:

- $\exists f_x, f_y$
- Dado  $\Delta z = f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0,y_0)$  entonces

$$\lim_{\|(h_1, h_2)\| \rightarrow 0} \frac{\Delta z - [f_x(x_0, y_0) \cdot h_1 - f_y(x_0, y_0) \cdot h_2]}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

Si  $f$  es diferenciable en  $(x,y) \in D$  entonces el diferencial total  $= dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$

NOTAS: • Si  $f$  es diferenciable  $\Rightarrow f$  es continua (si no es continua no es diferenciable)  
 Pero puede ser continua y no ser diferenciable  
 • Si  $\exists f_x, f_y$  y son continuas  $\Rightarrow f$  diferenciable (al revés no tiene porqué)

Si  $f$  diferenciable entonces  $D_{\alpha}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cdot \sen \alpha$

Llamamos vector Gradiente a  $\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ , siendo  $\vec{\nabla} = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y}$

Si  $f$  diferenciable en  $(x,y)$  entonces  $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \vec{\nabla}f \cdot \vec{u}$ , con  $\vec{u}$  unitario

Si  $f$  diferenciable y  $\vec{\nabla}f(x_0, y_0) = 0$  entonces  $(x_0, y_0)$  es un punto crítico (ver práct.6)

Si  $f$  diferenciable y  $\vec{\nabla}f(x_0, y_0) \neq 0$  entonces

- $\vec{\nabla}f(x_0, y_0)$  me da la dirección de máximo crecimiento de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ ,  
 con  $\|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\|$  el valor máximo de la derivada direccional en  $(x_0, y_0)$ ,
- $-\vec{\nabla}f(x_0, y_0)$  me da la dirección de máximo decrecimiento de  $f$  en  $(x_0, y_0)$ ,  
 con  $-\|\vec{\nabla}f(x_0, y_0)\|$  el valor máx negativ. de la deriv direcc. en  $(x_0, y_0)$ ,

## 12.5.- Reglas de derivación

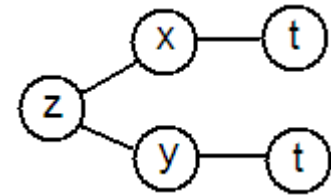
### a) Derivación de una función compuesta $z=f(x,y)$ con una única variable ind. $t$

Sea una función  $z=f(x,y)$ . A su vez  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$

Se hace el árbol de dependencias y usamos estas reglas:

- Cada raya es una derivada
- Deriv. parcial si salen varias rayas, total si sólo sale una
- Se suman todos los caminos que llegan a  $t$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (\text{esto se suele llamar la regla de la cadena})$$

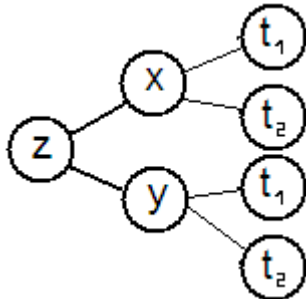


Ej:  $z=f(x,y)$ ,  $y=y(x)$ , hallar  $dz/dx$

### b) Deriv. sucesivas de una función compuesta con una única variable ind. $t$

Tener en cuenta que a  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y a  $\frac{\partial z}{\partial y}$  hay que aplicarle la regla de la cadena.

### c) Derivación de una función compuesta $z=f(x,y)$ con varias variable ind. $t_i$



$$\frac{dz}{dt_1} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt_1} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt_1}$$

## 12.6.- Funciones implícitas

Def

Sea la ecuación  $F(x,y)=0$

$F$  define la función implícita  $y(x)$  si  $F(x,y(x))=0$  siendo  $y(x)$  única

Teorema de la función implícita

Dada  $F(\bar{x}, y)=0$  con  $F$  continua en un entorno de  $(\bar{a}, b)$ , si verifica:

- $F(\bar{a}, b)=0$
- $F$  diferenciable en  $(\bar{a}, b)$ , (exigiremos que  $F$  de clase  $C^1$  en  $(\bar{x}_0, y_0)$ )
- $F_y \neq 0$  en  $(\bar{a}, b)$ ,

entonces:  $\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}$  en  $(\bar{a}, b)$ ,

## 12.7.- Extremos relativos: Ver Práctica 6