12.- Funciones de varias variables.

12.0.- Definiciones

Una función *escalar* de **n** variables **f** : $D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una aplicación, t.q.

$\bar{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in D \to y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$

D = Dominio(f), es decir, el conjunto de $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ para los que f existe

Una función *escalar* de **2** variables **f** : $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una aplicación, t.q.

$(x,y)\in D \to z=f(x,y)$

D = Dominio(f), es decir, el conjunto de (x,y) para los que f existe

La gráfica de f es el lugar geométrico de los puntos (x,y,z) dados por z=f(x,y).

Si f es continua entonces f representa una superficie

12.1.- Nociones topológicas en $\mathbb{R}^2$

Consideramos $\mathbb{R}^2$ dotado de estructura de Espacio Vectorial

Consideramos $||v|| = \sqrt{x^2+y^2}$ la norma euclidea de v, donde $v=(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Consideramos la distancia entre los puntos $P_1=(x_1,y_1)$ y $P_2=(x_2,y_2)$

$d(P_1,P_2)=||P_2-P_1||=||(x2-x1,\ y2-y1)|| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y)^2}$

Llamamos Bola Abierta de centro P_0 y radio ε al conjunto de puntos del plano cuya distancia a P_0 es menor que ε: $\mathbf{B_\varepsilon(P_0)}=\{P \in \mathbb{R}^2$, t.q. $||P-P_0||<\varepsilon$

Llamamos Bola Reducida de centro P_0 y radio ε a $\mathbf{B^r_\varepsilon(P_0)= B_\varepsilon(P_0)-\{P_0\}}$

12.2.- Límite

$\mathbf{L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}$ si $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, t.q. si $(x,y)\in B^r_\delta(P_0) \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$

La función f tiende hacia el límite L cerca de (x_0,y_0) si se puede hacer que f(x,y) esté tan cerca como queramos de L haciendo que (x,y) esté suficientemente cerca de (x_0,y_0), siendo (x,y) distinto de (x_0,y_0).

Si existe L, entonces por muy pequeño que sea ε encontraremos un δ(ε)

NOTA: Si el límite existe, es único.

NOTA: Cuando $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ se dice que es un infinitésimo

Llamamos límites reiterados a: $\mathbf{L_{xy}} = \lim_{y\to y_0}\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]$

$\mathbf{L_{yx}} = \lim_{x\to x_0}\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]$

Llamamos límite radial al límite de f(x,y) cuando nos acercamos a (x_0,y_0) según la recta $y=y_0+m(x-x_0)$: $\mathbf{L_m}= \lim_{x\to x_0} f\left(x, y_0+m\cdot(x-x_0)\right)$

Llamamos límite direccional al límite de f(x,y) cuando nos acercamos a (x_0,y_0) según una curva C que pasa por (x_0,y_0)

Si $L_{xy} \neq L_{yx}$, ó L_m depende de m, ó $L_m\neq$Limites reiterados $\Rightarrow \nexists L$

NOTAS:

- Si ∃L entonces coincidirá con cualquier límite reiterado o direccional que exista.
- si $L^*= L_{xy}=L_{yx}=L_C$, entonces L* es el candidato a L, pero puede no haber límite.
- Puede existir L, aunque no exista algún límite reiterado.

• Sea L* candidato a L $\rightarrow$ Poner |f(x,y) – L*| en coord. polares: $\begin{array}{l} x=x_0+r\cdot\cos\alpha \\ y=y_0+r\cdot\text{sen}\,\alpha \end{array}$
$\rightarrow$ Acotar $|f(x,y) - L^*| \le g(r)$
$\rightarrow$Si $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$ entonces L=L*

12.3.- Continuidad

En general, f(x,y) es continua en $(x_0,y_0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

12.4.- Diferenciabilidad. Sea z=f(x,y) definida en un abierto D

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,\ y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,\ y+h)-f(x,y)}{h}$$

En la práctica $\frac{\partial f}{\partial x}$ se calcula:
- imaginando la **y** como una constante
- derivando respecto a la variable **x**

Llamamos Derivada direccional de f en (x_0,y_0) según el vector $\vec{u}$ unitario a

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f\big((x_0,y_0) + h\cdot\vec{u}\big) - f(x_0,y_0)}{h}$$

Si nos dan un vector $\vec{v}$ no unitario lo normalizamos haciendo: $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

f es diferenciable en $(x_0,y_0)\in D$ si:
- $\exists\ f_x, f_y$
- Dado $\Delta z= f(x_0+h_1,\ y_0+h_2)-f(x_0,y_0)$ entonces

$$\lim_{\|(h_1,h_2)\|\to 0} \frac{\Delta z-\big[f_x(x_0,y_0)\cdot h_1-f_y(x_0,y_0)\cdot h_2\big]}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$

Si f es diferenciable en $(x,y)\in D$ entonces el diferencial total = $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$

NOTAS: • Si f es diferenciable $\Rightarrow$ f es continua (si no es continua no es diferenciabl)
Pero puede ser continua y no ser diferenciable
• Si $\exists\ f_x, f_y$ y son continuas $\Rightarrow$ f diferenciable (al revés no tiene porqué)

Si f diferenciable entonces $D_\alpha f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\cdot\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cdot sen\ \alpha$

Llamamos **vector Gradiente** a $\vec{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, siendo $\vec{\nabla} = \vec{\imath}\cdot\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\cdot\frac{\partial}{\partial y}$

Si f diferenciable en (x,y) entonces $D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f\cdot\vec{u}$, con $\vec{u}$ unitario

Si f diferenciable y $\vec{\nabla} f(x_0,y_0)=0$ entonces (x_0,y_0) es un punto crítico (ver práct.6)

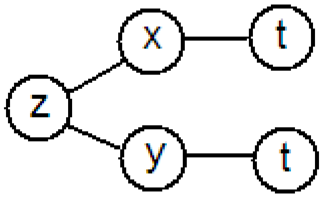
Si f diferenciable y $\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\neq 0$ entonces
- $\vec{\nabla} f(x_0,y_0)$ me da la dirección de máximo crecimiento de f en (x_0,y_0),
  con $\|\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\|$ el valor máximo de la derivada direccional en (x_0,y_0),
- -$\vec{\nabla} f(x_0,y_0)$ me da la dirección de máximo decrecimiento de f en (x_0,y_0),
  con $-\|\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\|$ el valor máx negativ. de la deriv direcc. en (x_0,y_0),

12.5.- Reglas de derivación

a) Derivación de una función compuesta z=f(x,y) con una única variable ind. t

Sea una función z=f(x,y).   A su vez   x=x(t),   y=y(t)

Se hace el árbol de dependencias y usamos estas reglas:



- Cada raya es una derivada
- Deriv.parcial si salen varias rayas, total si sólo sale una
- Se suman todos los caminos que llegan a **t**

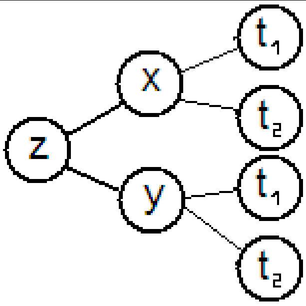
$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$ (esto se suele llamar la regla de la cadena

Ej: z=f(x,y), y=y(x), hallar dz/dx

b) Deriv. sucesivas de una función compuesta con una única variable ind. t

Tener en cuenta que a $\frac{\partial z}{\partial x}$ y a $\frac{\partial z}{\partial x}$ hay que aplicarle la regla de la cadena.

c) Derivación de una función compuesta z=f(x,y) con varias variable ind. t_i



$$\frac{dz}{dt_1} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt_1} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt_1}$$

12.6.- Funciones implícitas

Def

Sea la ecuación F(x,y)=0

F define la función implícita y(x) si F(x,y(x))=0   siendo y(x) única

Teorema de la función implícita

Dada F($\bar{x}$, y)=0 con F continua en un entorno de ($\bar{a}$,b), si verifica:

- F($\bar{a}$, b)=0
- F diferenciable en ($\bar{a}$,b), (exigiremos que F de clase $C^{1)}$ en ($\bar{x}_0$,y_0)
- $F_y \neq 0$ en ($\bar{a}$,b),

entonces: $\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}$ en ($\bar{a}$,b),

12.7.- Extremos relativos: *Ver Práctica 6*