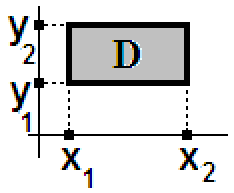
13.- Integración múltiple.

13.1.- Integral doble:

a) Definición: Integral sobre un recinto D rectangular



$I = \iint_D f(x,y) \cdot dx \cdot dy$

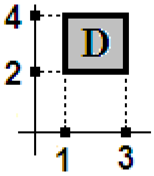
Si f(x,y) es continua en D $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Es integrable}}$

Si f(x,y) $\begin{cases} \text{está acotada en D y} \\ \text{es cont. en D salvo en una unión finita de subconj nulos} \end{cases}$

<u>Tª de Fubini</u>: Si f(x,y) está acotada en D y es cont. en D salvo en una unión finita de subconj nulos y existen las integrales respecto a cada una de las variables $\Rightarrow$

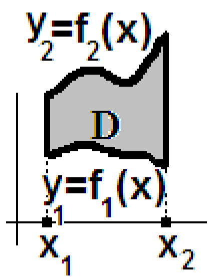
$$\iint_D f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int_{x=x_1}^{x=x_2} \left(\int_{y=y_1}^{y=y_2} f(x,y) \cdot dy \right) dx = \int_{y=y_1}^{y=y_2} \left(\int_{x=x_1}^{x=x_2} f(x,y) \cdot dx \right) dy$$

Ej.13.1: Calcula $\iint_D (2 \cdot x + y) \cdot dx \cdot dy$



b) Cálculo de Integrales para otro tipo de recintos

<u>b.1.Recinto con los laterales verticales</u>

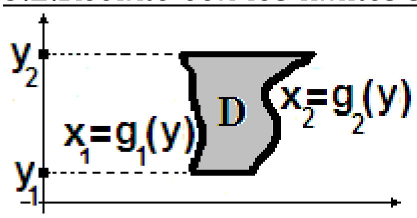


$$\iint_D f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int_{x=x_1}^{x=x_2} dx \left(\int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} f(x,y) \cdot dy \right)$$

Para cada valor de **x** que tomemos entre $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$,
la **y** varía entre $f_1(x)$ y $f_2(x)$

Ej.13.2: Calcula $\iint_D x \cdot y^2 \cdot dx \cdot dy$,
siendo D el recinto limitado por $\begin{cases} y^2=2\cdot p\cdot x \\ \text{la recta } x=p \end{cases}$

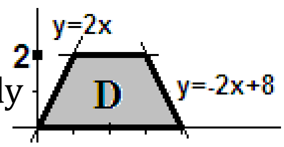
<u>b.2.Recinto con los límites sup. e inf. horizontales.</u>



$$\iint_D f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int_{y=y_1}^{y=y_2} dx \left(\int_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} f(x,y) \cdot dx \right)$$

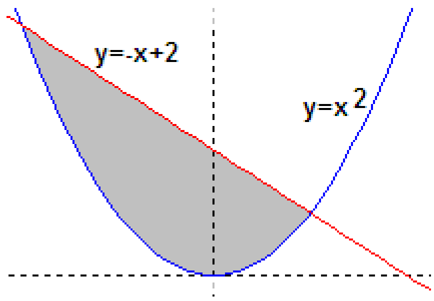
Para cada valor de **y** que tomemos entre $\mathbf{y_1}$ e $\mathbf{y_2}$,
la **x** varía entre $g_1(y)$ y $g_2(y)$

Ej.13.3: Calcula $\iint_D x \cdot y^2 \cdot dx \cdot dy$
siendo D el recinto indicado



<u>b.3.Recinto en general.</u>

Ej.13.4: Calcula $\iint_D x \cdot y^2 \cdot dx \cdot dy$
siendo D el recinto indicado



Ej.13.5: Ver después

c) Interpretaciones geométricas

- $A_D = \iint_D dA = \iint_D dx \cdot dy = \iint_D r \cdot dr \cdot d\alpha$ En polares dA=(dr)·(r·dα)
- $\iint_D f(x,y) \cdot dx \cdot dy$ = Volumen del 'prisma' entre f(x,y) y el recinto D (Recinto D en el plano XY)

d) cambios de variables

$\iint_D f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \iint_D f(x(u),y(u)) \cdot |J| \cdot du \cdot dv$ $\qquad |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

Ejemplo: Paso a polares

$x = r \cdot \cos\alpha \qquad y = r \cdot \operatorname{sen}\alpha$ $\qquad |J| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -r \cdot \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & r \cdot \cos\alpha \end{vmatrix} = r$

$\iint_D f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \iint_D g(r,\alpha) \cdot |J| \cdot dr \cdot d\alpha = \iint_D g(r,\alpha) \cdot r \cdot dr \cdot d\alpha$

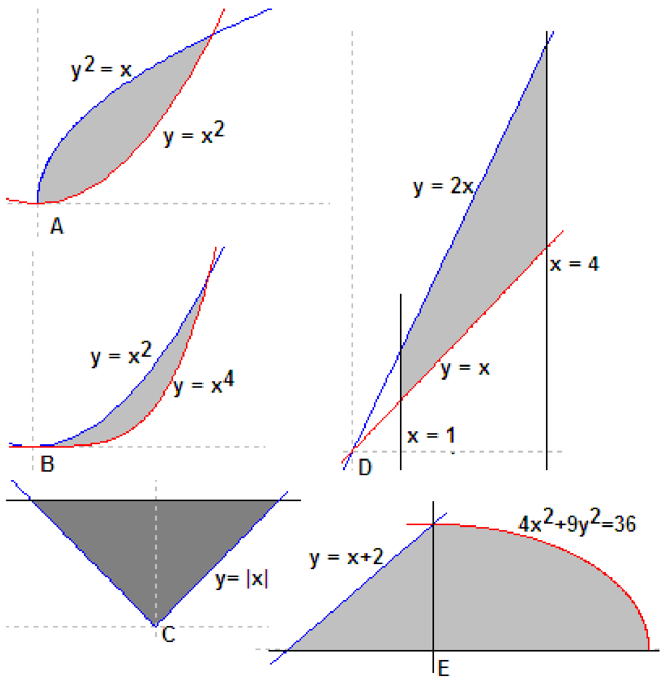
13.2.- Integral triple: Definición, cálculo, cambios de variables

- Por tiempo no se verán este año pero son similares a las integrales dobles, pero con una dimensión más

EJERCICIOS EXTRA:

13.5.- Indicar las dos integrales reiteradas con las que calcularías $\iint_D f(x,y) \cdot dx \cdot dy$

Alfonsa, nº12, 13, 14



13.6.- Calcular la temperatura media de una placa circular de radio=R si la temperatura en función del radio es $T(r) = K \cdot \frac{1}{1+r^2}$