INGENIERÍA QUÍMICA - CÁLCULO
1^a CONVOCATORIA 6-2-2010

1. Expresar en forma exponencial las raíces en el cuerpo de los complejos de la siguiente ecuación
$$z^6 + 7z^3 - 8 = 0$$

2. Determinar razonadamente el carácter de las siguientes series:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)^n$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

3. Sea la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Estudiar su continuidad y la existencia de derivadas parciales.

   (b) Hallar la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$ en la dirección dada por el vector $\overrightarrow{PQ}$, siendo $P = (-1,2)$ y $Q = (0,3)$.

   (c) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

4. Hallar
$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{3\operatorname{sen} x + 4\cos x} dx$$

5. Determina la naturaleza de los puntos críticos de la función
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}z^4 - xy - yz$$
calculando sus valores extremos si los tiene.

INGENIERÍA QUÍMICA - CÁLCULO
2^a CONVOCATORIA 16-9-2010

1. (1.5 pts) Representa en forma binómica

$(a)\ e^{(1-i)^2}$ $\qquad (b)\ (1+i)^{17}$ $\qquad (c)\ \frac{(2+3i)(1+2i)}{1-i}$

2. (1.5 pts) Estudia en función del parámetro $a > 0$ la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$$

3. (2 pts) Dada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x^2+2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Estudia la continuidad de f en el origen.
   (b) Calcula las derivadas parciales de f en el origen.
   (c) Calcula el valor de la derivada direccional de f en la dirección del vector $v = (1,1)^T$ en el punto $(0,0)$.
   (d) Estudia la diferenciabilidad de la función en dicho punto.

4. (1.5 pts) Justifica por qué las siguientes integrales son impropias y calcula su valor caso de ser convergentes

$$a)\ \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx \qquad\qquad b)\ \int_0^1 (\ln\frac{1}{x})^3 dx$$

5. (1.5 pts) Halla

$$\int \frac{\text{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

Pregunta de Prácticas

1. (1.25 pts.) Determina los extremos relativos de la función

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$$

2. (0.75 pts.) El polinomio de MacLaurin de orden 4 de una función $f(x)$ es $P(x) = 1 - 2x^2 + 3x^4$. ¿Es $x = 0$ punto crítico de $f(x)$?. En caso afirmativo, ¿qué tipo de punto es?. Justifica tu respuesta

CÁLCULO. INGENIERÍA INFORMÁTICA

PRIMERA CONVOCATORIA. 4 DE FEBRERO DE 2010

Nombre ....

1. Escribir el siguiente conjunto como unión de intervalos

$$\{x \in \mathbf{R} | \left|\frac{x+3}{2}\right| \geq 5\}$$

2. Hallar, si existe, $\lim_{x \to 0} \frac{4x+|x|}{9x-3|x|}$

3. Sea $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x - 1$

   a. Probar que $p(x)$ posee al menos una raíz en los intervalos $[-1, 0]$ y $[0, 1]$.

   b. Demostrar que $p'(x)$ posee una única raíz real.

   c. Concluir que $p(x)$ tiene sólo dos raíces reales.

4. Calcular $\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$

5. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5^n}$ converge y hallar su suma.

6. Estudiar el carácter de la serie $\sum \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$

7. Desarrollar la función $f(x) = \int_0^x (e^{-t^2} - 1)dt$ en serie de Mac-Laurin, indicando su intervalo de convergencia.

8. Sea $f(x, y) = \frac{1 - \cos(\sqrt{xy})}{y}$ si $x, y > 0$. Determinar, si existe, $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$

9. Estudiar la diferenciabilidad en el origen de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

10. Si $f, g \in C^2(\mathbf{R})$ demostrar que la función

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

es solución de la ecuación de ondas $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

CÁLCULO. INGENIERÍA INFORMÁTICA

SEGUNDA CONVOCATORIA. 18 DE SEPTIEMBRE DE 2010

Nombre ....

1. Escribir el siguiente conjunto como unión de intervalos

$$\{x \in \mathbf{R} | \left|\frac{x+3}{2}\right| \leq 5\}$$

2. Estudiar la continuidad en $x = 0$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ una función continua en $[-1, 1]$ tal que $f(-1) = f(1)$. Probar que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = f(c-1)$.

4. Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen} \sqrt{t} dt}{x^3}$

5. Si $\sum x_n$ converge, $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$ ¿qué puede decirse acerca de la convergencia o divergencia de $\sum \operatorname{sen} x_n$, $\sum \cos x_n$?

6. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 16n + 7}$ es convergente y calcular su suma.

7. Considerando $\left(x^2 f(x)\right)''$, determinar $f(x)$ si

$$f(x) = \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{x}{2\,.\,3} + \frac{x^2}{3\,.\,4} + \ldots + \frac{x^n}{(n+1)(n+2)} + \ldots$$

8. Hallar, si existe, $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

9. Estudiar la diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

10. Calcular los extremos relativos de la función $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4 - 1$ en $\mathbf{R}^2$.