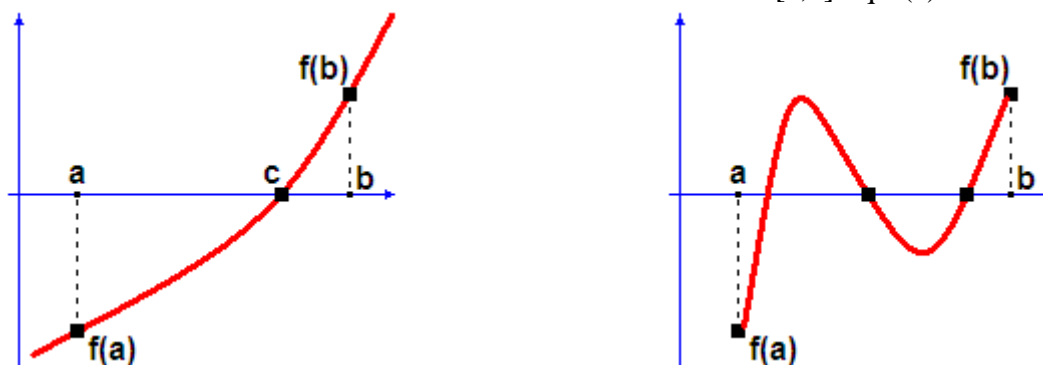


## Práctica 2 – Máxima – Resolución numérica de Ecuaciones

**1.- Teorema de Bolzano:** Sea  $f(x)$  continua en  $[a,b]$ , con  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (signos distintos)  
Entonces EXISTE AL MENOS un  $c \in [a,b]$  t.q.  $f(c)=0$



Es decir,  $f(x)$  tiene al menos un cero en ese intervalo, aunque puede tener varios

Nota: Si  $f'(x) \leq 0$  en  $[a,b]$ , ó  $f'(x) \geq 0$  en  $[a,b]$  entonces **ESE CERO ES ÚNICO** en  $[a,b]$ .

### 2.-Metodo numéricos para la resolución de ecuaciones.

Se trata de resolver la ecuación  $f(x)=0$ , lo cual puede ser complicado analíticamente o imposible.

Por ejemplo, con:  $f(x)=3x^5-4x^4+2x^3-x^2+5x-7$  ó  $f(x)=e^x-2 \cdot x$

Paso 1: Estableceremos intervalos  $[a,b]$  que contengan una única raíz de  $f(x)$

Paso 2: Utilizaremos algún método numérico iterativo de forma que  $\mathbf{x}_k$  será un aproximación a la solución exacta tras  $\mathbf{k}$  iteraciones.

### 3.- Método de bisección.

Sea  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^0$  t. q.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , por Bolzano sabemos que  $\exists c \in (a,b)$  t.q.  $f(c)=0$

- Llamemos  $[a_0, b_0]$  a nuestro intervalo  $[a,b]$
- El error al tomar el punto medio como solución es  $\mathbf{error} \leq \frac{b-a}{2}$
- Si el error es mayor que el admitido haremos una iteración
  - Llamemos  $\mathbf{m}$  al punto medio de  $\mathbf{a}_0$  y  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{m} = \frac{a_0+b_0}{2}$
  - Si  $f(m)=0$ , casualmente lo hemos encontrado: SOL = m. PARAMOS
  - Si  $f(m) \neq 0$  elegimos entre  $\begin{cases} [a_0, m] \text{ si es que } f(a_0) \cdot f(m) < 0, \text{ haciendo } [a_1, b_1] = [a_0, m] \\ [m, b_0] \text{ si es que } f(m) \cdot f(b_0) < 0, \text{ haciendo } [a_1, b_1] = [m, b_0] \end{cases}$
  - Calculo de nuevo el error con el nuevo intervalo
  - Si  $\mathbf{error} > \mathbf{error}_{\text{admitido}}$
- SOL=punto medio el ultimo intervalo considerado

El error tras  $\mathbf{n}$  iteraciones y tomar como solución el punto medio del último intervalo es  $\mathbf{error} \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$

Podemos saber el  $\mathbf{n}^\circ$  de iteraciones a priori, despejando el primer  $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$  que cumpla:

$$\mathbf{error} < \mathbf{error}_{\text{admitido}}, \text{ es decir, } \frac{b-a}{2^{n+1}} < \mathbf{error}_{\text{admitido}}$$

Ejemplo:

1º.- Crear la función bisección:

```

biseccion(f,a,b,erroradmitido):=block
(
  [i, n, m],
  if subst(a,x,f)*subst(b,x,f)>0 then
    (
      print("El intervalo [",a,",",b,"] no cumple Bolzano")
    )
  else
    (
      n: ceiling(log((b-a)/erroradmitido)/log(2)-1),
      print("Se necesitan ",n," iteraciones"),
      for i:1 thru n step 1 do
        (
          print("Iteracion ",i),
          m: (a+b)/2,
          if subst(m,x,f)=0 then
            (
              print("Casualm se halló el valor exacto en ",i," iterac. "),
              i: n
            )
          else
            if subst(a,x,f)*subst(m,x,f)<0 then b: m else a: m
          ),
        print("Valor aprox. tras ",n," iteraciones"),
        float(a+b)/2
      )
    )
);
  
```

2º.- Para hallar un cero de  $f(x)=x^2-2$  que esté en el intervalo  $[1,3]$  y con un error máximo =  $0.000001$  haré:

```
biseccion(x^2-2, 1, 3, 0.000001)
```

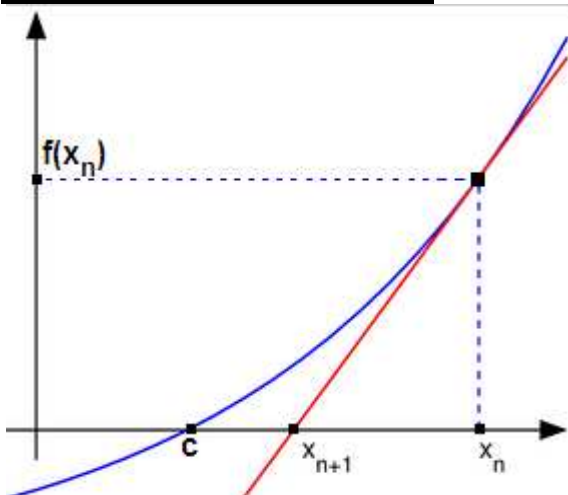
Previamente mostrará cuantas iteraciones son necesarias.

**Nota1:** Si casualmente halla una solución exacta parará de iterar y nos avisará.

**Nota2:** Si introducimos un intervalo que no cumple Bolzano también nos avisará y no calculará.

NOTA.GENERAL: Si cumple Bolzano, el método de bisección converge siempre, pero lentamente. (necesito muchas iteraciones).

#### 4.- Método de Newton-Raphson



- Sea  $f \in C^2[a,b]$  con  $f(a) \cdot f(b) < 0$   
 $f''$  signo cte en  $[a,b]$
- Partimos de una aproximación  $x_0$  cercana al valor exacto  $c$ , que cumpla  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$
- Calcularemos la recta tangente en el pto  $(x_n, f(x_n))$
- El punto de corte de la tangente con el eje de abscisas,  $x_{n+1}$ , será una aproximación a  $c$  mejor que  $x_n$ .

$$f'(x_n) = m = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

Despejando: 
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cota del error: Buscamos  $m \leq |f'(x)|$ ,  $M \geq |f''(x)| \quad \forall x \in [a,b]$ ,  
 (lo mejor es hacer la gráfica de  $|f'(x)|$  y de  $|f''(x)|$  y elegir  $m$  y  $M$ )  
 $m > 0$  es más pequeño que el mínimo de  $f'(x)$  en el intervalo  
 $M > 0$  es más grande que el máximo de  $f''(x)$  en el intervalo

Hay dos formas de medir el error tras la iteración  $k$

- a)  $\text{error}_k < \frac{|f(x_k)|}{m}$ , (esta cota del error es más restrictiva que la siguiente)
- b)  $\text{error}_k < \frac{M}{2 \cdot m} \cdot (x_k - x_{k-1})^2$  (la condición b) suele simplificarse y paramos de iterar cuando  $|x_k - x_{k-1}| < \epsilon$  prefijado)

Elijo

**Ejemplo: Hallar los ceros de  $f(x)=x^2-2$ .**

`f: x^2-2`

Probaré en el intervalo [1,3]

`subst(1,x,f)*subst(3,x,f);`

`(%02) -7`

Como es negativo cumple con Bolzano

`fp: diff(f,x);`

`(%03) 2x`

`fpp: diff(f,x,2);`

`(%04) 2`

Veo que  $f''(x)$  tiene el mismo signo en todo el intervalo, si no lo veo a ojo, hago la gráfica de  $f''(x)$   
 Ahora busco un candidato para  $x_0$ . Pruebo con  $x_0=1.25$

`x0: 1.25`

`subst(x0,x,f)*subst(x0,x,fpp);`

`(%06) -0.875`

No cumple las condiciones para aplicar Newton. Probaré con  $x_0=2$

`x0: 2`

`subst(x0,x,f)*subst(x0,x,fpp);`

`(%08) 4`

$x_0=2$  sí que me sirve.

Busco un valor para  $m$  (como es creciente en todo el intervalo tomo un valor menor que  $|f'(1)|=2$ )

`m: 0.9`

Si hubiera sido más difícil, dibujaría  $|f'(x)|$  en el intervalo [1,3] y elegiría  $m$

Ahora iterar por ejemplo hasta que  $\text{error} < 0.000001 = 10^{-6}$  ó hasta que  $\epsilon = |x_k - x_{k-1}| < 0.001$

`x1: float( x0-subst(x0,x,f)/subst(x0,x,fp) ); /* comentario */`

`mierror:abs(subst(x1,x,f))/m;`

`eps:abs(x1-x0);`

`(%064) 1.5`

$x_1$

`(%065) 0.2777777777777778`

mierror

`(%066) 0.5`

$\epsilon$

`x2: float( x1-subst(x1,x,f)/subst(x1,x,fp) ); /* comentario */`

`mierror:abs(subst(x2,x,f))/m;`

`eps:abs(x2-x1);`

`(%067) 1.4166666666666667`

$x_2$

`(%068) 0.0077160493827163`

mierror

`(%069) 0.08333333333333333`

$\epsilon$

`x3: float( x2-subst(x2,x,f)/subst(x2,x,fp) ); /* kjhgk */`

`mierror:abs(subst(x3,x,f))/m;`

`eps:abs(x3-x2);`

`(%070) 1.41421568627451`

$x_3$

`(%071) 6.6747832031902963 \cdot 10^{-6}`

mierror

`(%072) 0.0024509803921569`

$\epsilon$

## CONCLUSIONES:

- Nos cuesta más elegir y comprobar el intervalo
- Nos ha costado elegir el  $x_0$  inicial cercano a la solución exacta  $c$ .
- Pero converge muy rápido, converge cuadráticamente  
( $mierror_1=0'2$ ,  $mierror_2=0'007$ ,  $mierror_3=0'000006$ )
- Podríamos hacer una función que iterase automáticamente cuando sepáis programar más.

## 5.- Ejercicios

5.1.- Resolver:  $x=e^{-x}$ , con 4 decimales exactos

- Halla previamente un intervalo donde esté garantizado que haya una única solución (no vale con una gráfica)
- Antes de utilizar el método de bisección calcula cuantas iteraciones son necesarias
- Calcúlalo con el método de bisección y compara el nº de iteraciones con el apartado b
- Ahora con el método de Newton-Raphson.
- Indica las diferencias y problemas encontrados al aplicar un método y otro.

5.2.- Halla el punto de corte de  $y=x^2$  con  $y=e^x$  Debes decirme: *el punto de corte es el (....., .....*)

5.3.- a) Demostrar que la ecuación  $x = \tan(x)$  posee infinitas raíces reales.

b) Utilizar el método de bisección para aproximar las dos 1<sup>as</sup> raíces positivas (6 decimales)

5.4.- Utiliza el mét. de bisección para hallar  $\sqrt[3]{17}$  (*observa cómo he hallado  $\sqrt{2}$  en los ejemplos*)

5.5.- Encontrar la solución positiva de  $2 \cdot \sin(x) = x$  con los dos métodos.

5.6.- La función  $f(x) = \frac{4 \cdot x - 7}{x - 2}$  se hace cero en  $x = 7/4$ .

Utilizar el método de Newton para resolver  $f(x) = 0$  con las aproximaciones iniciales:

a)  $x_0 = 1'6$ ; b)  $x_0 = 1'5$ ; c)  $x_0 = 3$  Explicar qué ocurre en cada caso.

5.7.- Calcular 4 iteraciones del método de Newton si  $f(x) = x^{1/3}$  tomando  $x_0 = 0'1$ . ¿Qué ocurre?

5.8.- a) Halla un intervalo donde encuentres un cero de  $f(x) = x^3 + x - 3$

b) Demuestra que es ese cero es único. Hállalo con los 2 métodos