Grado en Ingeniería de Telecomunicaciones – Matemáticas I – 1ºA

Práctica 3 – Taylor

Polinomios de Taylor

El polinomio de Taylor de una función f(x) nos permite aproximar esa función por su polinomio de Taylor correspondiente en un cierto intervalo con un error controlado.

f(x) = Polinomio de Taylor de f(x) de orden **n** centrado en **a** + Resto de Lagrange

$f(x) = \boxed{T_n[f,a](x)} + \boxed{R_n[f,a](x)}$

$f(x) = \boxed{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n} + \boxed{\frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}}$, ($\xi$ es un nº entre **a** y **x**)

$f(x_o) \approx T_n[f,a](x_o)$, con un error = $|R_n[f,a](x_o)|$,

Si $n\to\infty$ y $|R_n[f,a](x_o)| \to 0$ entonces f(x) = serie de Taylor de f(x) centrada en a = $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

válido $\forall x \in I_{nterv.Convergencia}$

`taylor(f,x,a,n)` calcula el **polinomio de Taylor** de **f** de orden **n** centrado en **a** = $\mathbf{T_n[f,a](x)}$

1.- a) Calcula $T_3[f,0](x)$ de f(x)= ln(1+x)

```
f: log(1+x);
t3: taylor(f,x,0,3)
```

b) Calcula el error al calcular ln(1) mediante su polinomio de Taylor

```
aprox: subst(0,x,t3));
exacto: log(1);
abs(exacto-subst(0,x,t3));
```

c) Calcula ln(1'1) directamente y utilizando el polinomio de Taylor anterior y calcula el error.

d) Calcula ln(1'9) directamente y utilizando el polinomio de Taylor anterior y calcula el error

2.- a) Calcula de nuevo ln(1), ln(1.1) y ln(1.9) usando $T_5[f,0](x)$

	ln(1)	ln(1.1)	ln(1.9)
Exacto=			
Usando $T_3[f,0]$=			
Error=			
Usando $T_5[f,0]$=			
Error=			

b) CONCLUSIÓN (recuadra lo que proceda):

Cuando aproximo $f(x_o)$ por $T_n[f,a](x_o)$ el error aumenta / disminuye cuando $\mathbf{x_o}$ se aleja de **a**

Cuando aproximo $f(x_o)$ por $T_n[f,a](x_o)$ el error aumenta / disminuye cuando **n** aumenta.

3.- a) Muestra en la misma gráfica f(x)=sin(x), $T_1[f,0](x)$, $T_5[f,0](x)$, $T_{25}[f,0](x)$,

```
f: sin(x);
t[n]:=taylor(f,x,0,n);
plot2d([f,t[1],t[5],t[25]], [x,-15,15], [y,-2,2])$
```

Observa que si n aumenta Tn(x) se aproxima en un intervalo cada vez más amplio a f(x)

Si $n\to\infty$ el intervalo se haría infinito y coincidiría con la serie de Taylor de f(x), cuyo I=(-∞,∞)

b) Ahora repite con f(x)=ln(1+x), $T_1[f,0](x)$, $T_{50}[f,0](x)$, $T_{100}[f,0](x)$, $T_{500}[f,0](x)$,

```
f: log(1+x);
t[n]:=taylor(f,x,0,n);
plot2d([f,t[1],t[50],t[100],t[500]], [x,-2,2], [y,-10,10])$
```

Observa que si n aumenta Tn(x) se aproxima cada vez más a f(x) pero sólo en el intervalo (-1,1)
Si n→∞ el intervalo sería (-1,1] que es el Interv. de Conv.de la serie de Taylor de ln(1+x)

++

Para aproximar $f(x_0)$ por $T_n[f,a](x_0)$ con un error < $\text{error}_{\text{admitido}}$ lo 1º es hacer $|R_n[f,a](x_0)|<\text{error}_{\text{admitido}}$, y despejar de aquí **n**, para saber cuántos términos tomar en $T_n[f,a](x_0)$

Como no sabemos cuánto es $f^{n+1)}(\xi)$, en vez de despejar la **n** de $\left|\frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x_0-a)^{n+1}\right|<\text{error}_{\text{admitido}}$

despejaremos de $\left|\frac{M}{(n+1)!}\cdot(x_0-a)^{n+1}\right|<\text{error}_{\text{admitido}}$

donde M es una cota superior de $f^{n+1)}(\xi)$, es decir, $f^{n+1)}(\xi)\le M$, sabiendo que ξ está entre **a** y x_0.

++

3.- a) Calcula ln(0’9) con un error < 10^{-6}.

b) Calcula $e^{1/3}$ con un error < 10^{-4}.

c) Calcula sen(π/9) con un error < 10^{-3}.

++

5.- Halla los desarrollos de arcsen(x) y ln(1+x), y, teniendo en cuenta sólo los términos importantes,

calcula: $\lim_{x\to 0}\frac{\text{arcsen}^2(x)-x^2}{x^3-\ln^3(1+x)}$ Compara con el límite que calcula MatLab

6.- Halla los desarrollos de cosh(x), cos(x), ln(1+x), sin(x), y, teniendo en cuenta sólo los términos

importantes, calcula: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cosh(x)}{\cos(x)}\right)^{\frac{\ln(1+x)}{x-\text{sen}(x)}}$ *Compara con el lím. que calcula Matlab*

7.- Halla los desarrollos de ln(1+x), cos(x/2), y, teniendo en cuenta sólo los términos importantes,

calcula: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ *Compara con el límite que calcula MatLab*

8.- a) Halla los desarrollos de ln(1+x), mételo en el desarrollo de senh(x),

b) Calcula el desarrollo de $(1-e^x)$,

c) Calcula el desarrollo de sin(x) y de $\sqrt{1+x}$, y multiplícalos, teniendo en cuenta sólo los términos importantes,

d) Finalmente junta todo para calcular: $\lim_{x\to 0}\frac{\text{senh}[\ln(1+x)]-\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}\cdot\text{sen}(x)+1-e^x}$

Compara con el límite que calcula MatLab