Grado en Ingeniería Química – Matemáticas I – 1ºB

Práctica 4 – MatLab – Taylor

Polinomios de Taylor

`taylor(f,n+1,a)` calcula el **polinomio de Taylor de f** de orden **n** centrado en **a** = $\mathbf{T_n(f,a)}$

1.- a) Calcula $T_3(f,0)$ de f(x)= ln(1+x)
  b) Calcula ln(1) directamente y utilizando el polinomio de Taylor anterior y calcula el error.
  c) Calcula ln(1'1) directamente y utilizando el polinomio de Taylor anterior y calcula el error.
  d) Calcula ln(1'9) directamente y utilizando el polinomio de Taylor anterior y calcula el error
  e) Teclea `taylortool` para ver una representación grafica de f(x) y su polinomio de Taylor. Ves aumentando n. Observa que por mucho que aumentes n sólo coinciden las gráficas en el intervalo (-1,1]. (*lógico, porque el desarrollo de* ln(1+x) *sólo vale para ese intervalo*)

2.- Repite para f(x)=sen(x), para x=0, x=0'1 y x=0'9.
Observa en el apartado e) que según aumenta n las gráficas se van solapando en un intervalo cada vez mayor (*lógico, pues la serie de Taylor tiene intervalo de convergencia de* $(-\infty,\infty)$)

++

f(x) = Polinomio de Taylor de f(x) de orden n centrado en a + Resto de Lagrange

$$f(x) = \boxed{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n} + \boxed{\frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}},$$ (ξ es un nº entre **a** y **x**)

$$f(x) = \boxed{T_n[f,a](x)} + \boxed{R_n[f,a](x)}$$

$f(x) \approx T_n[f,a](x)$, con un error $\leq |R_n[f,a](x)|$

Para aproximar $f(x_0)$ por $T_n[f,a](x_0)$ con un error < $\text{error}_{\text{admitido}}$ lo 1º es hacer $|R_n[f,a](x_0)| < \text{error}_{\text{admitido}}$, y despejar de aquí **n**, para saber cuántos términos tomar en $T_n[f,a](x_0)$

Como no sabemos cuánto es $f^{n+1)}(\xi)$, en vez de despejar de $\left|\frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}\right| < \text{error}_{\text{admitido}}$

despejaremos de $\left|\frac{M}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}\right| < \text{error}_{\text{admitido}}$

donde M es una cota superior de $f^{n+1)}(\xi)$, es decir, $f^{n+1)}(\xi) \leq M$, sabiendo que ξ está entre **a** y x_0.

++

3.- a) Calcula ln(0'9) con un error < 10^{-6}.

  b) Calcula $e^{1/3}$ con un error < 10^{-4}.

  c) Calcula sen(π/9) con un error < 10^{-3}.

4.- a) Usa MatLab para obtener un desarrollo suficiente de senh(x) y de $(1+x)^{3/2}$ para obtener un infinitésimo g(x) equivalente a $f(x) = \frac{\text{senh}^2(x)-x^2}{(1+x)^{3/2}-x}$

  b) Compruébalo haciendo $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$

5.- Halla los desarrollos de arcsen(x) y ln(1+x), y, teniendo en cuenta sólo los términos importantes,

calcula: $\lim_{x\to 0}\frac{\text{arcsen}^2(x)-x^2}{x^3-\ln^3(1+x)}$ Compara con el límite que calcula MatLab

6.- Halla los desarrollos de cosh(x), cos(x), ln(1+x), sin(x), y, teniendo en cuenta sólo los términos importantes, calcula: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cosh(x)}{\cos(x)}\right)^{\frac{\ln(1+x)}{x-\mathrm{sen}(x)}}$ *Compara con el lím. que calcula Matlab*

7.- Halla los desarrollos de ln(1+x), cos(x/2), y, teniendo en cuenta sólo los términos importantes, calcula: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ *Compara con el límite que calcula MatLab*

8.- a) Halla los desarrollos de ln(1+x), mételo en el desarrollo de senh(x),

b) Calcula el desarrollo de $(1-e^x)$,

c) Calcula el desarrollo de sin(x) y de $\sqrt{1+x}$, y multiplícalos, teniendo en cuenta sólo los términos importantes,

d) Finalmente junta todo para calcular: $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{senh}[\ln(1+x)]-\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}\cdot\mathrm{sen}(x)+1-e^x}$

Compara con el límite que calcula MatLab