P4

Cálculo de áreas planas

Áreas en cartesianas: El área de la porción de plano delimitada por el arco de curva $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, el eje OX y las ordenadas $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Áreas en parametricas: Si el arco de curva viene dado en paramétricas, $x = x(t)$, $y = y(t)$, con $t \in [t_0, t_1]$ y $x(t) \in C^1([t_0, t_1])$ y $y(t) \geq 0$ el área viene dada por:

$$\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt$$

Áreas en polares: Si el arco de curva viene dado en polares $\rho = \rho(\alpha)$, el área delimitada por dicha curva y las semirectas $\alpha = \alpha_0$ y $\alpha = \alpha_1$ viene dada por:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha 1} \frac{1}{2}\rho(\alpha)^2 d\alpha$$

Ejercicio 1. Hallar el área limitada por las curvas $y^2 + x - 3 = 0$ y $x - y - 1 = 0$. Representa previamente dichas curvas.

Ejercicio 2. Hallar el área encerrada por un arco de cicloide $x(t) = r(t - \sin t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

Ejercicio 3. Hallar el área de la porción de plano interior al circulo de ecuación $\rho = 2\cos(\alpha)$, pero exterior al circulo $\rho = 1$.

Cálculo de longitudes de arcos de curva

La longitud de un arco de curva C de ecuaciones paramétricas $x = x(t), y = y(t)$ con $t \in [t_0, t_1]$ con $x(t)$, $y(t)$ funciones de clase $C^1([t_0, t_1])$, viene dada por:

$$L(C) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

Si el arco de curva viene dado en cartesianas $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ con f de clase $C^1([a, b])$

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Si el arco de curva viene dado en forma polar $\rho = \rho(\alpha)$, $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$L(C) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sqrt{[\rho(\alpha)]^2 + [\rho'(\alpha)]^2}d\alpha$$

Ejercicio 1. Hallar la longitud del arco de curva de ecuaciones $x(t) = r(\cos(t) + t\text{sen}(t))$ y $y(t) = r\text{sen}(t) - t\cos(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 2. Hallar la longirud del arco de curva de ecuación $y = x^2 - 2x + 5$ entre $x = 1$ y $x = 3/2$.

Ejercicio 3. Hallar la longitud del arco de curva $\rho = \alpha$, con $\alpha \in [0, 2\pi]$. Esta curva se conoce como la espiral de Arquímedes.

Cálculo del área de una superficie de revolución

Sea $y = f(x) \in C^1([a, b])$, con $f(x) > 0$. El área de la superficie de revolución engendrada al girar dicho arco de curva un ángulo α alrededor del eje OX viene dada por:

$$A_R = \alpha \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Si el arco de curva viene dado por sus ecuaciones paramétricas, con $x(t)$, $y(t) \in C^1([t_0, t_1])$

$$A_R = \alpha \int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Ejercicio 1. Hallar el área de la superficie de revolución engendrada por el arco de curva $y = \sqrt{x}$ con $x \in [0, 4]$ al girar una vuelta completa alrededor del eje OX.

Cálculo de volúmenes de revolución

La porción de plano delimitada por $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ y el eje OX engendra un sólido de revolución al girar ésta un ángulo α alrededor del eje OX, y su volumen viene dado por

$$V_R = \frac{\alpha}{2}\int_a^b (f(x))^2 dx$$

Si el arco de curva viene dado por sus ecuaciones paramétricas

$$V_R = \frac{\alpha}{2}\int_{t_0}^{t_1} (y(t))^2 x'(t)dt$$

Ejercicio 1. Hallar el volumen del sólido engendrado al realizar un giro completo alrededor del eje OX la región plana delimitada por la astroide para $t \in [0, \pi]$ y OX.

2. Integración numérica: La fórmula del trapecio

Algunas funciones elementales no tienen primitivas elementales. Por ejemplo, ninguna función elemental tiene como derivada a estas funciones

$$x^{1/3}(1 - x)^{1/2}, \quad x^{1/2}\cos x, \quad \frac{\cos x}{x}, \quad \text{sen}\, x^2$$

Si se ha de calcular una integral definida cuyo integrando no admite primitiva elemental, el teorema fundamental del Cálculo no es útil y hay que recurrir a métodos aproximados. Una forma de aproximar el valor de una integral definida es el siguiente:

En primer lugar, partimos $[a, b]$ en n subintervalos cada uno de longitud $\Delta x = (b - a)/n$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

A continuación consideramos un trapecio sobre cada subintervalo. El área de este trapecio es:

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\frac{b - a}{n}$$

Por tanto la suma de las áreas de los n trapecios es una aproximación de la integral:

$$\int_a^b f(x)dx \sim \left(\frac{b - a}{2n}\right)[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Definición: La fórmula del trapecio compuesta para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ viene dada por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq T(f, h) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right),}$$

Teorema: Si $f \in C^2([a, b])$ el error que se comete al aproximar $\int_a^b f(x)dx$ mediante la fórmula del trapecio compuesta es :

$$R_{(a,b)}(f) = -(b - a)\frac{h^2}{12}f''(\theta) \qquad \text{con } \theta \in [a, b].$$

Ejercicio resuelto

Aproximar la integral

$$\int_0^1 x^3 dx$$

utilizando la regla del trapecio compuesta para $n = 10, 20, 40, 80$. Analizar los resultados obtenidos teniendo en cuenta que conocemos el valor exacto.

Ejercicio 2.2

Aproximar las siguientes integrales utilizando la fórmula del trapecio compuesta. ¿Cuántos decimales significativos tiene tu aproximación?

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

Ejemplo 2. Representa la elipse de ecuación $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$.

Ejemplo 3. Representar la curva $x(t) = r(t - \sin t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, para el valor de $r = 2$. Esta curva recibe el nombre de cicloide.

Ejemplo 4. Representar la familia de astroides dadas por $x = n\cos^3 t$, $y = n\sin^3 t$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $n =$ [redacted] 2, [redacted]