Integración

Matlab permite hacer integrales tanto analíticas como numéricas. Se pueden calcular integrales indefinidas de la mayor parte de las funciones integrables cuya estructura no sea muy complicada, por ejemplo funciones compuestas de logaritmos, exponenciales, funciones racionales, trigonométricas, etc., relacionadas de una forma "simple". También se pueden realizar integrales definidas e impropias.

Los comandos **int('f',a,b)** o bien **syms x**, **int(f,a,b)** permiten hallar $\int_a^b f(x)dx$ y caso de omitir los límites de la integral a y b estaremos calculando la integral indefinida.

Ejemplo 1. Calcular las siguientes integrales:

$$\boxed{\int \cos(4x)dx \quad \int \cos^5(x)dx \quad \int_0^{5/2} \log(x+4)x^2dx}$$

```
>> int('cos(4*x)')

ans =

sin(4*x)/4

>> int('cos(x)^5')

ans =

sin(x)^5/5 - (2*sin(x)^3)/3 + sin(x)

>> int('log(x+4)*x^2',0,5/2)

ans =

(637*log(13/2))/24 - (64*log(4))/3 - 785/72

>> simplify(ans)

ans =

(637*log(13))/24 - (1661*log(2))/24 - 785/72
```

Aún cuando MatLab puede calcular muchas primitivas, existen funciones que no tienen una primitiva expresable como combinación de funciones elementales o simplemente MatLab no sabe hallarlas.

```
>> int('log(x+sin(x))')

Warning:  Explicit integral could not be found.

ans =

int(log(x + sin(x)), x)
```

Si queremos evaluar una integral definida de este tipo podemos utilizar el comando **double**

```
>> double(int('log(x+sin(x))',2,5))
Warning:  Explicit integral could not be found.
ans =
 3.5428
```

MatLab hace aproximaciones graficas y numéricas de la $\int_a^b f(x)dx$ mediante sumas de Rieman con el comando **rsums**($'f'$, a, b). Si no se indica los valores de a y b hace las aproximaciones de $\int_0^1 f(x)dx$.

```
>> rsums 1/(1+x^2)
>> rsums('1/(1+x^2)',-4,4)
```

Obsérvese el efecto que tiene mover el cursor de la parte inferior de la ventana que aparece al utilizar este comando, y al mismo tiempo en la parte superior la aproximación numérica resultante.

MatLab también resuelve directamente algunas integrales impropias.

Ejemplo. Calcular

$$a)\int_0^{\pi/2} \tan(x)dx \quad b)\int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}dx}{1+x^2} \quad c)\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Representación de curvas

Curvas planas

Se llama curva plana C a un conjunto de pares ordenados $(x(t), y(t))$, tales que $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas de t en un cierto intervalo I.

Las ecuaciones $x = x(t) \quad y = y(t), \quad t \in I$ se llaman ecuaciones paramétricas de C.

Cuando por procedimientos algebraicos podamos eliminar el parametro t y obtener una relación entre las variables x e y, dicha ecuación recibe el nombre de ecuación cartesiana de la curva. Si dicha ecuación tiene la forma $F(x, y) = 0$ se dice que la curva viene dada en forma implícita y si alguna variable se puede despejar como $y = f(x)$ se dice que la curva viene dada en forma explícita.

Para representar curvas en cartesianas en forma explícita además de los comandos ya conocidos **fplot**, **ezplot** podemos utilizar **plot**, de la siguiente forma:

Ejemplo 1. Representar el polinomio $y = x^3 - 7x + 2$ en el intervalo $[-5, 5]$.

```
>> x=linspace(-5,5,200);
>> y=x.^3-7*x+2;
>> plot(x,y)
```

Este comando puede tener la forma **plot(x,y,S)** donde S es opcional y puede cambiar el color de la línea, o el trazado de esta. Se pueden ver las posibilidades con el comando **help plot.**

Si la curva viene dada en forma implícita utilizaremos el comando **ezplot**, como indica el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. Representa la elipse de ecuación $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$.

```
>> axis equal
>> ezplot('(x-2)^2/16+(y-3)^2/4-1',[-3,6])
>> grid on
>> hold on
>> plot(2,3,'*')
```

Ejemplo 3. Representar la curva $x(t) = r(t - \sin t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, para el valor de $r = 2$. Esta curva recibe el nombre de cicloide.

```
>> hold off
>> t=-6:.1:2*pi;
>> x=2*(t-sin(t)); y=2*(1-cos(t));
>> plot(x,y,'r')
```

Representar en la misma gráfica la circunferencia que la engendra

```
>> hold on
>> ezplot('x^2+(y-2)^2-4')
>> axis equal
>> grid on
```

Ejemplo 4. Representar la familia de astroides dadas por $x = \mathrm{n}\cos^3 t, \quad y = \mathrm{n}\sin^3 t$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $n = 1, 2, ..., 10$.

```
>> axis equal
>> grid on
>> syms t n
```

```
>> t=0:.1:2*pi;
>> for n=1:10;
x=n*(cos(t)).^3; y=n*(sin(t)).^3;
plot(x,y,'r')
hold on
end
```

Como todo punto del plano queda perfectamente determinado por sus coordenadas polares (ρ, α),cuya relación con las coordenadas cartesianas viene dada por $x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \mathrm{sen}\alpha$ otra forma de venir dada una curva es mediante la relación entre las coordenadas polares de cualquiera de sus puntos. Así, se dice que $\rho = f(\alpha)$ con $\alpha \in J$ es la ecuación de un arco de curva en polares. Para representarlas podemos pasar a paramétricas, sustituyendo en (1) ρ por $f(\alpha)$ y tomando como parametro α. En cuyo caso ya podemos utilizar el comando **plot**.

No obstante MatLab dispone de otros comandos como **polar** y **ezpolar**, que representan en el plano cartesiano la red polar es decir las lineas $\alpha = cte$, $\rho = cte$, es decir semirectas que parten del origen y circunferencias concéntricas.

Ejemplo 5. Representa la lemniscata de Bernouilli de ecuación $\rho = 4\sqrt{\cos 2\alpha}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$.

```
>> ezpolar('4*(cos(2*t)^(1/2))',[0,2*pi])
Warning:  Imaginary parts of complex X and/or Y arguments ignored
```

O bien utilizando el comando polar

```
>> t=0:0.01:2*pi;
>> r=4*(cos(2*t).^(1/2));
>> polar(t,r,'g')
```

MatLab representa los valores negativos de ρ considerando que el ángulo es $\alpha+\pi$. Para no tener la representación de estos, después de definir el de la curva definiremos $r = (r + abs(r))/2$ y a continuación el comando polar.

Cálculo de áreas planas

Áreas en cartesianas: El área de la porción de plano delimitada por el arco de curva $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, el eje OX y las ordenadas $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Áreas en parametricas: Si el arco de curva viene dado en paramétricas, $x = x(t)$, $y = y(t)$, con $t \in [t_0, t_1]$ y $x(t) \in \mathcal{C}^1([t_0, t_1])$ y $y(t) \geq 0$ el área viene dada por:

$$\int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt$$

Áreas en polares: Si el arco de curva viene dado en polares $\rho = \rho(\alpha)$, el área delimitada por dicha curva y las semirectas $\alpha = \alpha_0$ y $\alpha = \alpha_1$ viene dada por:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha 1} \frac{1}{2}\rho(\alpha)^2 d\alpha$$

Ejercicio 1. Hallar el área limitada por las curvas $y^2 + x - 3 = 0$ y $x - y - 1 = 0$. Representa previamente dichas curvas.

Ejercicio 2. Hallar el área encerrada por un arco de cicloide $x(t) = r(t - \sin t)$, $y(t) = r(1 - \cos t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

Ejercicio 3. Hallar el área de la porción de plano interior al circulo de ecuación $\rho = 2\cos(\alpha)$, pero exterior al circulo $\rho = 1$.

Cálculo de longitudes de arcos de curva

La longitud de un arco de curva C de ecuaciones paramétricas $x = x(t), y = y(t)$ con $t \in [t_0, t_1]$ con $x(t)$, $y(t)$ funciones de clase $\mathcal{C}^1([t_0, t_1])$,viene dada por:

$$L(C) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Si el arco de curva viene dado en cartesianas $y = f(x), \quad x \in [a, b]$ con f de clase $\mathcal{C}^1([a, b])$

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Si el arco de curva viene dado en forma polar $\rho = \rho(\alpha), \quad \alpha \in [\alpha_0, \alpha_1]$

$$L(C) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sqrt{[\rho(\alpha)]^2 + [\rho'(\alpha)]^2} d\alpha$$

Ejercicio 1. Hallar la longitud del arco de curva de ecuaciones $x(t) = r(\cos(t) + t\text{sen}(t))$ y $y(t) = r\text{sen}(t) - t\cos(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 2. Hallar la longirud del arco de curva de ecuación $y = x^2 - 2x + 5$ entre $x = 1$ y $x = 3/2$.

Ejercicio 3. Hallar la longitud del arco de curva $\rho = \alpha$, con $\alpha \in [0, 2\pi]$. Esta curva se conoce como la espiral de Arquímedes.

Cálculo del área de una superficie de revolución

Sea $y = f(x) \in C^1([a, b])$, con $f(x) > 0$. El área de la superficie de revolución engendrada al girar dicho arco de curva un ángulo α alrededor del eje OX viene dada por:

$$A_R = \alpha \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Si el arco de curva viene dado por sus ecuaciones paramétricas, con $x(t)$, $y(t) \in C^1([t_0, t_1])$

$$A_R = \alpha \int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Ejercicio 1. Hallar el área de la superficie de revolución engendrada por el arco de curva $y = \sqrt{x}$ con $x \in [0, 4]$ al girar una vuelta completa alrededor del eje OX.

Cálculo de volumenes de revolución

La porción de plano delimitada por $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ y el eje OX engendra un sólido de revolución al girar ésta un ángulo α alrededor del eje OX, y su volumen viene dado por

$$V_R = \frac{\alpha}{2} \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Si el arco de curva viene dado por sus ecuaciones paramétricas

$$V_R = \frac{\alpha}{2} \int_{t_0}^{t_1} (y(t))^2 x'(t) dt$$

Ejercicio 1. Hallar el volumen del sólido engendrado al realizar un giro completo alrededor del eje OX la región plana delimitada por la astroide para $t \in [0, \pi]$ y OX.

1 Ejercicios propuestos

1. Aproximar el valor de las siguientes integrales

$$\int_2^5 \operatorname{sen}(x^2)dx \qquad \int_2^7 \frac{dx}{\log(x)} \qquad \int_1^5 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$$

   con el comando **rsums** (cuando la partición del intervalo es 25, 50, y128) y con el comando **double**.

2. Determinar la función $y = f(x)$ cuya gráfica tiene pendiente $(3x-2)^2$ en cada punto $(x, f(x))$ y pasa por el punto $(-1, 1)$.

3. Representar la curva de ecuaciones paramétricas $x = 2t - \pi \operatorname{sen} t$ e $y = 2 - \pi \cos t$, con $t \in [-\pi, \pi]$. Obtener las ecuaciones de las dos tangentes a la curva que pasan por el punto $(0, 2)$ y representarlas en la misma gráfica.

4. Hallar el área bajo la curva normal $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ y el eje de abscisas. Calcular de forma aproximada el área limitada por la curva normal el eje de abscisas y las ordenadas $x = -1,96$ y $x = 1,96$.

5. Hallar el área limitada por las curvas de ecuación $y = 2 - x^2, \quad y = x$.

6. Hallar la longitud de la cardioide de ecuación $\rho = 3 - 3\cos(\alpha)$, con $\alpha \in [0, 2\pi]$.