Ejercicio 1.2

Utilizar Matlab para calcular primitivas de

$$x^{1/3}(1-x)^{1/2}, \ \ x^{1/2}\cos x, \ \ \frac{\cos x}{x}, \ \ \operatorname{sen} x^2$$

¿Qué ocurre?

2. Integración numérica: La fórmula del trapecio compuesta

Algunas funciones elementales no tienen primitivas elementales. Por ejemplo, ninguna función elemental tiene como derivada a estas funciones

$$x^{1/3}(1-x)^{1/2}, \ \ x^{1/2}\cos x, \ \ \frac{\cos x}{x}, \ \ \operatorname{sen} x^2$$

Si se ha de calcular una integral definida cuyo integrando no admite primitiva elemental, el teorema fundamental del Cálculo no es útil y hay que recurrir a métodos aproximados. Una forma de aproximar el valor de una integral definida es el siguiente:

En primer lugar, partimos $[a,b]$ en n subintervalos cada uno de longitud $\Delta x = (b-a)/n$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

A continuación consideramos un trapecio sobre cada subintervalo. El área de este trapecio es:

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \frac{b-a}{n}$$

Por tanto la suma de las áreas de los n trapecios es una aproximación de la integral:

$$\int_a^b f(x)dx \sim \left(\frac{b-a}{2n}\right) [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Definición: La fórmula del trapecio compuesta para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ viene dada por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq T(f,h) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right),}$$

Teorema: Si $f \in C^2([a, b])$ el error que se comete al aproximar $\int_a^b f(x)dx$ mediante la fórmula del trapecio compuesta es :

$$R_{(a,b)}(f) = -(b-a)\frac{h^2}{12}f''(\theta)$$

con $\theta \in [a, b]$.

Trabajo con Matlab

Programa

Implementar la fórmula del trapecio compuesta, para aproximar el valor de la integral de una función f definida en un M-fichero .

```
%   Programa para implementar la formula del trapecio compuesta
    function valor=trapecio(fun,a,b,n)
%   fun: funcion que se quiere integrar
%   a: limite inferior de la integral
%   b: limite superior de la integral
%   n: numero de subdivisiones
    format long;
    h=(b-a)/n;
      s=0;
      for i=1:n-1
            s=s+h*feval(fun,a+i*h);
        end
     s=s+(h/2.)*(feval(fun,a)+feval(fun,b));
     valor=s;
     return
```

Observar cómo se calcula el sumatorio.

Ejercicio resuelto

Aproximar la integral

$$\int_0^1 x^3 dx$$

utilizando la regla del trapecio compuesta para $n = 10, 20, 40, 80$. Analizar los resultados obtenidos teniendo en cuenta que conocemos el valor exacto.

Basta con teclear

```
>> valor=trapecio('fun',0,1,n)
```

si en el fichero **fun.m** está definida la función $f(x) = x^3$.

Ejercicio 2.1

Utilizar la fórmula del trapecio compuesta para aproximar la integral

$$\int_1^6 (2 + \operatorname{sen}(2\sqrt{x}))dx$$

Completar la tabla sabiendo que el valor exacto es 8.1834792077

h	$Valor\ aproximado$	$Error$
0.5		
0.25		
0.125		
0.0625		
0.03125		

Ejercicio 2.2

Aproximar las siguientes integrales utilizando la fórmula del trapecio compuesta. ¿Cuántos decimales significativos tiene tu aproximación?

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \qquad \int_1^2 x^2 \log(x) dx$$