

Grado en Ingeniería Química – Matemáticas I – 1ºB
Práctica 6 – MatLab – Extremos en funciones de varias variables

Definiciones

Sea f una función de n variables: $z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \quad \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$\text{Matriz Hessiana} = H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\bar{x}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\bar{x}) & \dots & f_{x_n x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}, \quad \text{donde } (\bar{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Tª de Schwarz en dos variables (para ahorrarse el cálculo de algún $f_{x_i x_j}$)

Si f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0) y $\exists f_{xy}(x_0, y_0) \Rightarrow f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

Este resultado es válido para n variables

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con D abierto.

$\bar{x}_0 \in D$ es un máximo relativo de $f \Leftrightarrow f(\bar{x}_0) \geq f(\bar{x}), \forall \bar{x} \in B_r(\bar{x}_0)$, para algún r

$\bar{x}_0 \in D$ es un mínimo relativo de $f \Leftrightarrow f(\bar{x}_0) \leq f(\bar{x}), \forall \bar{x} \in B_r(\bar{x}_0)$, para algún r

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con D cerrado y acotado, y f es continua en $D \Rightarrow f$ tiene un máx. y un mín. en D

$\bar{x}_0 \in D$ es un punto crítico de $f \Leftrightarrow \vec{\nabla} f(\bar{x}_0) = \vec{0}$ ó \nexists alguna $f_{x_i x_j}$

Si f tiene en \bar{x}_0 un máx o un mín $\Rightarrow \bar{x}_0$ es un pto crítico. Si además f diferenciable en $\bar{x}_0 \Rightarrow \vec{\nabla} f(\bar{x}_0) = \vec{0}$

Sea \bar{x}_0 un punto crítico de f , y $f \in C^2$ en una $B_r(\bar{x}_0)$

Si $H(\bar{x}_0)$ es Definida Positiva $\Rightarrow f$ tiene un mínimo en \bar{x}_0

Si $H(\bar{x}_0)$ es Definida Negativa $\Rightarrow f$ tiene un máximo en \bar{x}_0

¿Cómo ver si la matriz $H(\bar{x}_0)$ es Definida Positiva, Definida Negativa, etc?

Opción 1

• Voy haciendo submatrices de H , cada submatriz empezando por el elemento $H_{1,1}$.

A_1 de dimensión 1×1 , la A_2 de dimensión 2×2 , A_3 de dimensión 3×3 , así hasta llegar $A_n = H$.

• Si todos los $\det(A_i)$ son positivos entonces H es Definida Positiva

• Si los signos de los $\det(A_i)$ salen en el orden: $A_1:-, A_2:+, A_3:-, A_4:+, \dots$ entonces H es Definida Neg.

Opción 2

• Calcular los valores propios de H

• Si todos los valores propios son positivos \Rightarrow Definida Positiva $\Rightarrow \bar{x}_0$ es un mínimo

• Si todos los valores propios son negativos \Rightarrow Definida Negativa $\Rightarrow \bar{x}_0$ es un máximo

• Si unos valores propios son positivos y otros negativos \Rightarrow Indefinida $\Rightarrow \bar{x}_0$ es un punto de silla

Nota: Si sale algún cero, los métodos no son capaces de decirme nada

1. Estudiar los extremos de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

b) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$

c) $f(x, y, z) = (x + z^2) \exp(x(y^2 + z^2 + 1))$

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + yz + 3$

e) $f(x, y) = x^4 - 2px^2 - y^2 + 3$, para distintos valores de p real.

f) $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}$

g) $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$