Grado en Ingeniería Química – Matemáticas I – 1ºB
Práctica 6 – MatLab – Extremos en funciones de varias variables

Definiciones

Sea f una función de n variables: $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \qquad \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Matriz Hessiana = $H(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\bar{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\bar{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$, donde $(\bar{x}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

<u>Tª de Schwarz</u> en dos variables (para ahorrarse el cálculo de algún $f_{x_i x_j}$)

Si f_x y f_y son continuas en (x_0,y_0) y $\exists f_{xy}(x_0,y_0) \Rightarrow$ $\mathbf{f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)}$
Este resultado es válido para n variables

Sea f: $D\subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con D abierto.
$\bar{x}_0\in D$ es un <u>máximo relativo</u> de f $\Leftrightarrow$ $f(\bar{x}_0) \geq f(\bar{x}), \forall \bar{x}\in B_r(\bar{x}_0)$, para algún r
$\bar{x}_0\in D$ es un <u>mínimo relativo</u> de f $\Leftrightarrow$ $f(\bar{x}_0) \leq f(\bar{x}), \forall \bar{x}\in B_r(\bar{x}_0)$, para algún r

Sea f: $D\subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con D cerrado y acotado, y f es continua en D $\Rightarrow$ f tiene un máx. y un mín. en D

$\bar{x}_0\in D$ es un <u>punto crítico</u> de f $\Leftrightarrow$ $\vec{\nabla} f(\bar{x}_0)=\bar{0}$ ó $\nexists$ alguna $f_{x_i x_j}$

Si f tiene en $\bar{x}_0$ un máx o un mín $\Rightarrow$ $\bar{x}_0$ es un pto crítico. Si además f diferenciable en $\bar{x}_0 \Rightarrow \vec{\nabla} f(\bar{x}_0)=\bar{0}$

Sea $\bar{x}_0$ un punto crítico de f, y $f\in C^{2)}$ en una $B_r(\bar{x}_0)$
Si $H(\bar{x}_0)$ es Definida Positiva $\Rightarrow$ f tiene un mínimo en $\bar{x}_0$
Si $H(\bar{x}_0)$ es Definida Negativa $\Rightarrow$ f tiene un máximo en $\bar{x}_0$

<u>¿Cómo ver si la matriz $H(\bar{x}_0)$ es Definida Positiva, Definida Negativa, etc?</u>

<u>Opción 1</u>
- Voy haciendo submatrices de H, cada submatriz empezando por el elemento $H_{1,1}$.
  A_1 de dimensión 1x1, la A_2 de dimensión 2x2, A_3 de dimensión 3x3, así hasta llegar $A_n = H$.
- Si todos los $\det(A_i)$ son positivos entonces H es <u>Definida Positiva</u>
- Si los signos de los $\det(A_i)$ salen en el orden: A_1:-, A_2:+, A_3:-, A_4:+, … entonces H es <u>Definida Neg.</u>

<u>Opción 2</u>
- Calcular los valores propios de H
- Si todos los valores propios son positivos $\Rightarrow$ Definida Positiva $\Rightarrow$ $\bar{x}_0$ es un mínimo
- Si todos los valores propios son positivos $\Rightarrow$ Definida Negativa $\Rightarrow$ $\bar{x}_0$ es un máximo
- Si unos valores propios son positivos y otros negativos $\Rightarrow$ Indefinida $\Rightarrow$ $\bar{x}_0$ es un punto de silla

Nota: Si sale algún cero, los métodos no son capaces de decirme nada

1. Estudiar los extremos de las siguientes funciones:

   a) $\boxed{f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y}$
   b) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$
   c) $f(x,y,z) = (x+z^2)\exp(x(y^2+z^2+1))$
   d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + 2xz + yz + 3$
   e) $\boxed{f(x,y) = x^4 - 2px^2 - y^2 + 3, \text{ para distintos valores de } p \text{ real.}}$
   f) $f(x,y) = 1 - (x^2+y^2)^{1/3}$
   g) $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$